Adamczewski, B. (2007) "Sur L'exposant de Densité des Nombres Algébriques,"
International Mathematics Research Notices, Vol. 2007, Article ID 024, 6 pages.
doi:10.1093/imrn/rnm024

Sur L'exposant de Densité des Nombres Algébriques

Boris Adamczewski

CNRS & Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne cedex France

Correspondence to be sent to: Boris Adamczewski, CNRS & Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan, 21 avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne cedex France.
e-mail: Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr

Dans un travail récent, Fischler et Rivoal ont proposé une nouvelle façon de mesurer l'irrationalité d'un nombre réel. Il s'agit d'associer à tout nombre réel irrationnel un exposant, appelé exposant de densité, qui a la particularité de prendre uniquement en compte les suites d'approximations rationnelles dont les dénominateurs croissent de façon au plus géométrique. En réponse à une question des auteurs, nous démontrons que l'exposant de densité de tout nombre algébrique irrationnel est fini.

1 Introduction

L'article [1] a pour but d'introduire un nouvel exposant permettant de mesurer l'irrationalité du nombre réel ξ. Cet *exposant de densité* prend uniquement en compte les suites d'approximations rationnelles dont les dénominateurs croissent de façon au plus géométrique. Cette restriction est source de difficultés et rend a priori très différente l'étude de l'exposant de densité de celle de l'exposant d'irrationalité usuel.

Nous rappelons à présent la définition de l'exposant de densité. Etant donnés ξ un nombre réel irrationnel et $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs, on pose

$$\alpha_\xi(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\|u_{n+1}\xi\|}{\|u_n\xi\|} \text{ et } \beta(\mathbf{u}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

Received October 2, 2006; Revised February 21, 2007; Accepted February 25, 2007

See http://www.oxfordjournals.org/our_journals/imrn/ for proper citation instructions.

© The Author 2007. Published by Oxford University Press. All rights reserved. For permissions, please e-mail: journals.permissions@oxfordjournals.org.

où $\|x\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche du réel x. L'exposant de densité de ξ, noté $\nu(\xi)$, est alors défini comme l'infimum des nombres réels de la forme

$$\frac{1}{2}\log(\alpha_\xi(\mathbf{u})\beta(\mathbf{u})),$$

lorsque $\mathbf{u}$ décrit l'ensemble des suites croissantes d'entier positifs telles que $\alpha_\xi(\mathbf{u}) < 1$ et $\beta(\mathbf{u}) < +\infty$. Lorsqu'il n'existe aucune suite $\mathbf{u}$ vérifiant ces conditions, on opte pour la convention $\nu(\xi) = +\infty$.

Plusieurs problèmes motivant l'introduction de cet exposant peuvent être trouvés dans [1]. Dans cet article, Fischler et Rivoal démontrent entre autres choses que $\nu(\xi) = 0$ pour presque tout nombre réel ξ au sens de la mesure de Lebesgue, que $\nu(\xi) = 0$ pour les nombres quadratiques et que $\nu(\xi)$ est fini pour tout nombre algébrique possédant au moins un conjugué de Galois réel (différent de ξ lui-même). Comme conséquence immédiate de ce dernier résultat, ils obtiennent que l'exposant de densité est fini pour tout nombre algébrique de degré pair. Cependant, la question de la finitude de l'exposant de densité de tout nombre algébrique irrationnel est laissée ouverte.

L'objet de cette note est de répondre (positivement) à cette question.

Théorème 1.1. L'exposant de densité de tout nombre algébrique irrationnel est fini. $\square$

Fischler et Rivoal conjecturent en fait un résultat bien plus précis que celui donné par le théorème 1, à savoir que l'exposant de densité des nombres algébriques irrationnels est toujours nul. Notons également que l'approche que nous proposons ici peut être rendue effective. Elle permet par exemple de montrer que $\nu(\xi) \leq 1.2359$, où ξ désigne le plus petit nombre de Pisot, c'est-à-dire, l'unique racine réelle du polynôme $X^3 - X - 1$.

2 Démonstration du Théorème 1.1

Une première étape dans la démonstration du théorème 1.1 consiste à démontrer que tout corps de nombres réel admet un nombre de Pisot comme élément primitif et qu'il est possible d'imposer une condition supplémentaire sur les modules des conjugués de Galois de cet élément primitif.

Lemme 2.1. Soient ξ un nombre algébrique réel, $d = [\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}]$ et r_1 (resp. r_2) le nombre de plongements réels (resp. complexes) de $\mathbb{Q}(\xi)$ dans $\mathbb{C}$. Notons $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r_1}$ (resp.

$\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}$) les plongements réels (resp. complexes) de sorte que $\sigma_1 = \mathrm{id}$. Alors, il existe un entier algébrique β qui est un élément primitif de $\mathbb{Q}(\xi)$ et tel que

$$\beta > 1 > |\sigma_2(\beta)| > |\sigma_3(\beta)| > \cdots > |\sigma_{r_1+r_2}(\beta)|. \qquad \square$$

Démonstration. Il suffit de reprendre l'argument donné au début de la démonstration du théorème 5 de [1]. ∎

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 1.1.

Démonstration du théorème 1.1. Soit ξ un nombre algébrique réel irrationnel. Nous allons démontrer que $\nu(\xi)$ est nécessairement fini. Nous conservons les notations du Lemme 2.1 et notons dans la suite $\overline{z}$ (resp. $\Re(z)$) le conjugué complexe (resp. la partie réelle) du nombre complexe z.

Tout d'abord, le lemme 2.1 assure l'existence d'un entier algébrique β vérifiant les deux conditions suivantes:

(i) il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\xi = Q(\beta)$;

(ii) $\beta > 1 > |\beta_2| > |\beta_3| \cdots > |\beta_{r_1+r_2}|$.

Ici $\{\beta_j,\ 1 \le j \le r_1\}$ désigne l'ensemble des r_1 conjugués de Galois réels de β (avec la convention $\beta_1 := \beta$) et $\{(\beta_j, \overline{\beta}_j),\ r_1 < j \le r_1 + r_2\}$ désigne l'ensemble des r_2 paires de conjugués de Galois complexes de β. Posons également $\beta_{r_1+r_2+j} := \overline{\beta}_{r_1+j}$ pour $1 \le j \le r_2$ et $Q(X) := c_0 + c_1 X + \cdots + c_d X^d$. A priori les coefficients c_k sont rationnels, mais nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il s'agit d'entiers relatifs. En effet, si t désigne le ppcm des dénominateurs des entiers c_k, alors $t\xi = tQ(\beta)$, tQ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\nu(\xi) = \nu(t\xi)$ d'après le lemme 3 de [1] puisque t est entier.

Notons $P(X) := a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d$ le polynôme minimal de β et considérons une suite $(u_n)_{n\ge 1}$ de nombres réels vérifiant la relation de récurrence linéaire dont le polynôme caractéristique est le polynôme P, c'est-à-dire, telle que

$$\forall n \ge 1, \quad u_{n+d} = -a_{d-1}u_{n+d-1} - a_{d-2}u_{n+d-2} - \cdots - a_0 u_n.$$

Puisque P est le polynôme minimal de β, P est à racines simples et il existe des nombres complexes uniques λ_j, $1 \le j \le d$, avec $\lambda_{r_1+r_2+j} = \overline{\lambda}_{r_1+j}$ pour $1 \le j \le r_2$, tels que

$$\forall n \ge 1, \quad u_n = \lambda_1 \beta^n + \sum_{j=2}^{d} \lambda_j \beta_j^n. \tag{2.1}$$

Naturellement, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est déterminée par la donnée du vecteur $(u_1, u_2, \ldots, u_d)$. Si ce dernier est choisi à coordonnées entières alors $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n puisque les coefficients de P sont eux-mêmes des entiers relatifs et que P est unitaire. Une autre remarque est que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ne peut être identiquement nulle à partir d'un certain rang dès lors que $(u_1, u_2, \ldots, u_d) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Nous supposons à présent que $(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ est un d-uplet d'entiers strictement positifs. Ainsi, d'après (ii) et (2.1), on a $\lambda_1 \neq 0$ et donc

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \lambda_1 \beta^n. \tag{2.2}$$

De plus, quitte à remplacer $(u_1, \ldots, u_d)$ par $(-u_1, \ldots, -u_d)$, on peut toujours supposer $\lambda_1 > 0$, c'est-à-dire que u_n est un entier strictement positif pour n assez grand.

D'après (2.1), pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n\beta^k - u_{n+k} = \sum_{j=2}^{d} \lambda_j (\beta^k - \beta_j^k)\beta_j^n. \tag{2.3}$$

Pour tout entier j, $2 \leq j \leq d$, posons

$$C_j := \lambda_j \sum_{k=0}^{d} c_k(\beta^k - \beta_j^k). \tag{2.4}$$

D'autre part,

$$u_n\xi - \sum_{k=0}^{d} c_k u_{n+k} = u_n \left(\sum_{k=0}^{d} c_k \beta^k\right) - \sum_{k=0}^{d} c_k u_{n+k} = \sum_{k=0}^{d} c_k \left(u_n\beta^k - u_{n+k}\right).$$

En posant $v_n = \sum_{k=0}^{d} c_k u_{n+k}$, les égalités (2.3) et (2.4) donnent

$$u_n\xi - v_n = \sum_{j=2}^{d} C_j \beta_j^n. \tag{2.5}$$

Remarquons maintenant qu'il existe un entier minimal l, $2 \leq l \leq r_1 + r_2$, tel que $C_l \neq 0$. En effet, le contraire impliquerait la rationalité de ξ puisque u_n est un entier non nul pour n assez grand.

Nous devons distinguer deux cas. Si $l \leq r_1$, alors β_l est réel et d'après (ii) et (2.5) il vient

$$|u_n\xi - v_n| = |C_l||\beta_l|^n + o(|\beta_l|^n).$$

On en déduit que $\nu(\xi)$ est fini puisque

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}\xi - v_{n+1}|}{|u_n\xi - v_n|} = |\beta_l| < 1$$

et que d'après (2.2)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta < +\infty.$$

Supposons à présent que $l > r_1$. Alors β_l est un nombre complexe non réel et d'après (ii), (2.4) et (2.5), il vient

$$|u_n\xi - v_n| = 2|\Re(C_l\beta_l^n)| + o(|\beta_l|^n) = 2|C_l|\,|\beta_l|^n\,|\cos(n\theta + x)| + o(|\beta_l|^n), \tag{2.6}$$

avec θ appartenant à $]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$ et x appartenant à $[0,2\pi]$.

Supposons dans un premier temps que $\theta/2\pi$ est un nombre rationnel. Alors la suite $(n\theta)_{n\geq 1}$ est périodique modulo 2π, disons de période p. De plus, il existe un entier n_0 tel que $\cos(n_0\theta + x) \neq 0$ puisque $\theta \in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$. En posant $U_n = u_{pn+n_0}$ et $V_n = v_{pn+n_0}$, on obtient d'après (2.6)

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|U_{n+1}\xi - V_{n+1}|}{|U_n\xi - V_n|} = |\beta_l|^p < 1$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{p(n+1)+n_0}}{u_{pn+n_0}} = \beta^p < +\infty,$$

ce qui prouve que $\nu(\xi)$ est fini.

Supposons maintenant que $\theta/2\pi$ est irrationnel. Fixons un nombre ε strictement positif. Il existe alors $0 < \delta < \pi/2$ tel que $\forall (x,y) \in]-\delta,\delta[^2$,

$$(1-\varepsilon) < |\cos x|/|\cos y| < (1+\varepsilon). \tag{2.7}$$

Comme $\theta/2\pi$ est irrationnel, la suite $(n\theta)_{n\geq 1}$ est dense modulo 2π. Il existe donc $a \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que $a\theta - 2\pi j \in]-\delta, 0]$, et il existe $b \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $b\theta - 2\pi k \in [0, \delta[$. De même, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $n_1\theta + x - 2\pi l \in]-\delta, \delta[$.

On définit alors la suite $(m_k)_{k\geq 1}$ de la façon suivante : on pose $m_1 := n_1$, puis pour $k \geq 1$ on pose $m_{k+1} := m_k + a$ s'il existe un entier n tel que $m_k\theta + x - 2\pi n \in]-\delta, 0]$, et $m_{k+1} := m_k + b$ s'il existe un entier n tel que $m_k\theta + x - 2\pi n \in]0, \delta[$. Ainsi, (2.7) garantit que

$$(1-\varepsilon) < |\cos(m_i\theta + x)|/|\cos(m_j\theta + x)| < (1+\varepsilon), \tag{2.8}$$

pout tout couple (i, j) d'entiers strictement positifs. Comme $|\beta_l| < 1$, il existe un entier s strictement positif tel que

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) |\beta_l|^s < 1.$$

Posons $U_n = u_{m_{sn}}$ et $V_n = v_{m_{sn}}$. En combinant (2.6) et (2.8), on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}\xi - V_{n+1}|}{|U_n\xi - V_n|} \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) |\beta_l|^s < 1.$$

D'autre part, l'équivalent (2.2) implique que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{m_{sn+s}}}{u_{m_{sn}}} \leq \beta^{sM} < +\infty,$$

où $M := \max\{a, b\}$. Cela prouve que $\nu(\xi)$ est fini et termine cette démonstration. ∎

Remerciements. L'auteur tient à remercier Christophe Delaunay et Tanguy Rivoal pour d'intéressantes discussions, ainsi que Stéphane Fischler pour de nombreuses suggestions qui ont permis sans conteste d'améliorer la présentation de cette note.

Reference

[1] Fischler, S., and T. Rivoal. "Un Exposant de Densité en Approximation Rationnelle." *International Mathematics Research Notices* (2006): 48, Article ID 95418.