Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux 00 (XXXX), 000–000

Méthode de Mahler, transcendance et relations linéaires : aspects effectifs

par Boris Adamczewski et Colin Faverjon

Résumé. Cette note est consacrée aux aspects algorithmiques de la méthode de Mahler. Dans un travail récent, nous avons utilisé un résultat de Philippon pour montrer qu'étant donnés une fonction q-mahlérienne $f(z)$ appartenant à $\mathbf{k}\{z\}$, où $\mathbf{k}$ est un corps de nombres, et un nombre algébrique α dans le domaine d'holomorphie de f, le nombre $f(\alpha)$ est soit transcendant, soit dans $\mathbf{k}(\alpha)$. Nous décrivons ici un algorithme permettant de trancher cette alternative. Plus généralement, étant donnés plusieurs fonctions q-mahlériennes $f_1(z), \cdots, f_r(z)$ et un nombre algébrique α dans le domaine d'holomorphie des f_i, nous montrons comment calculer explicitement une base de l'espace vectoriel des relations de dépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha), \cdots, f_r(\alpha)$.

Abstract. This note is concerned with algorithmic aspects of Mahler's method. In a recent paper, we used a result of Philippon to prove that, given a q-mahler function $f(z)$ in $\mathbf{k}\{z\}$, where $\mathbf{k}$ is a number field, and an algebraic number α in the domain of holomorphy of f, the number $f(\alpha)$ either belongs to the number field $\mathbf{k}(\alpha)$ or is transcendental. We describe here an algorithm which allows one to decide between these alternative facts. More generally, given several q-mahler functions $f_1(z), \cdots, f_r(z)$ and an algebraic number α lying in the domain of holomorphy of each f_i, we show how to explicitly compute a basis of the vector space of the linear dependence relations over $\overline{\mathbb{Q}}$ between the numbers $f_1(\alpha), \cdots, f_r(\alpha)$.

1. Introduction

Soit $q \geq 2$ un entier. Une fonction $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ est dite *q-mahlérienne* s'il existe des polynômes $p_{-1}(z), p_0(z), \ldots, p_n(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, non tous nuls, tels

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11J81,11J72.
Mots-clefs. Mahler's method, transcendence, linear independence.
This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Grant Agreement No 648132.

que

$$p_{-1}(z) + p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_n(z)f(z^{q^n}) \;=\; 0. \tag{1.1}$$

Étant donnée une telle équation, on peut toujours se ramener explicitement à une équation pour laquelle $p_0(z) \neq 0$ (cf. Remarque 2.3), ce que nous supposerons dans toute la suite. Afin d'étudier une fonction q-mahlérienne, il est souvent commode de considérer un système d'équations fonctionnelles de la forme :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

où $A(z)$ est une matrice de $\mathrm{Gl}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ et les f_i sont des fonctions de la variable z, analytiques au voisinage de $z = 0$. Rappelons qu'une fonction est solution d'une équation de type (1.1) si, et seulement si, elle est la coordonnée d'un vecteur solution d'un système de type (1.2). La donnée d'une équation de type (1.1) ou d'un système de type (1.2) ne permet pas en général de déterminer une solution $f(z)$ ou un vecteur solution $(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ de façon unique. Pour lever cette ambiguïté, il suffit, comme l'a remarqué Dumas [4], de se donner un nombre suffisant de coefficients du développement de Taylor à l'origine de f ou des fonctions f_i. Dans la section 4, nous reprenons la démarche de [4], afin de préciser brièvement ce point. Dans la suite, nous considérerons donc que chaque fonction q-mahlérienne est donnée avec une équation de type (1.1) ou un système de type (1.2), ainsi qu'avec un nombre suffisant de coefficients de Taylor pour la déterminer de manière unique. Rappelons également les faits classiques suivants (voir par exemple [1, 4, 6]).

- Une série formelle $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ solution d'une équation de type (1.1) est toujours convergente au voisinage de l'origine. Elle admet de plus un prolongement méromorphe sur le disque unité ouvert, le cercle unité formant une frontière naturelle dès lors que $f(z)$ n'est pas une fraction rationnelle.

- Les coefficients de Taylor d'une fonction q-mahlérienne engendrent une extension finie de $\mathbb{Q}$.

D'après la remarque précédente, on ne perd donc aucune généralité à supposer que $f(z)$ appartient à $\mathbf{k}\{z\}$, où $\mathbf{k}$ est un corps de nombres. Soient $f(z) \in \mathbf{k}\{z\}$ une fonction q-mahlérienne et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ dans le domaine d'holomorphie de $f(z)$. En nous appuyant sur un théorème de Philippon [5], nous avons montré dans [2] que l'on a toujours l'alternative suivante : soit $f(\alpha)$

est transcendant, soit $f(\alpha) \in \mathbf{k}(\alpha)$. L'objectif principal de cette note est de montrer que cette alternative peut être tranchée de façon algorithmique.

Algorithme 1.1. Soient $f(z)$ une fonction q-mahlérienne donnée par une équation de type (1.1) ou un système de type (1.2), et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique. On peut déterminer de manière algorithmique si la fonction f est définie au point α, et, le cas échéant, si $f(\alpha)$ est algébrique ou transcendant.

L'étude de la transcendance des valeurs d'une fonction q-mahlérienne $f(z)$ est un cas particulier de l'étude des relations de dépendance linéaire entre les valeurs de plusieurs fonctions mahlériennes. Nous montrerons plus généralement le résultat suivant.

Algorithme 1.2. Soient $f_1(z), \cdots, f_r(z)$ des fonctions q-mahlériennes, chacune données par une équation de type (1.1) ou un système de type (1.2), et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique. On peut déterminer de manière algorithmique si les fonctions $f_i(z)$ sont toutes définies au point α, et, le cas échéant, déterminer une base de l'espace vectoriel

$$Rel_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \overline{\mathbb{Q}}^r : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(\alpha) = 0 \right\} .$$

Afin étudier la nature des valeurs d'une fonction q-mahlérienne $f(z)$, il est souvent agréable de considérer son équation inhomogène minimale, c'est-à-dire l'équation de type (1.1) satisfaite par $f(z)$ pour laquelle l'entier n est minimal. Cette équation est bien unique (à multiplication par une constante près) si l'on impose aux polynômes $p_i(z)$ d'être premiers entre eux. Une étape intermédiaire dans l'algorithme 1.1 consiste à déterminer une telle équation.

Algorithme 1.3. Soit f une fonction q-malherienne donnée par une équation de type (1.1) ou un système de type (1.2). On peut déterminer explicitement l'équation inhomogène minimale de f.

Cet algorithme, dont l'intérêt est indépendant, est décrit dans la section 2. Les algorithmes 1.1 et 1.2 sont détaillés dans la section 3.

2. Détermination des relations linéaires entre fonctions mahlériennes

Déterminer l'ensemble des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre des fonctions q-mahlériennes est *a priori* une tâche ardue qui relève de la théorie de Galois aux différences associée à l'opérateur mahlérien $z \mapsto z^q$. Nous remarquions dans [2, Théorème 6.1] que l'on peut *a contrario* déterminer de manière effective une base de l'espace vectoriel des relations de dépendance linéaires sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre plusieurs fonctions q-mahlériennes données.

Algorithme 2.1. Soient $f_1(z), \dots, f_n(z)$ des fonctions q-mahlériennes solutions d'un système de type (1.2) et à coefficients dans un corps de nombre $\mathbf{k}$. On peut calculer explicitement la dimension r de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbf{k}(z)$ par les fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$, et, pour chaque r-uplet de fonctions $f_{i_1}(z), \dots, f_{i_r}(z)$, tester si ces dernières sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}(z)$. Le cas échéant, on peut déterminer un système de la forme (1.2) contenant uniquement ces r fonctions.

Description de l'algorithme 2.1. Notons de manière compacte $\mathbf{f}(z)$ le vecteur colonne formé des fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$. Développant chaque coordonnée en séries entières, on note

$$\mathbf{f}(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{f}_i z^i \,.$$

Soient $b(z)$ le plus petit multiple commun des dénominateurs des coefficients de $A(z)$, d le maximum des degrés des coefficients de la matrice $b(z)A(z)$, et ν la valuation en $z = 0$ du polynôme $b(z)$. On pose $h := 4^n d$ et

$$M := \left\lceil \frac{q^{n\left(\frac{qh+d+1}{q-1}+q+1\right)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil \,.$$

Associée à $\mathbf{f}(z)$, on définit alors la matrice suivante

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}) := \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \cdots & \mathbf{f}_h & \cdots & \mathbf{f}_M \\ 0 & \mathbf{f}_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{f}_{M-1} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{f}_0 & \cdots & \mathbf{f}_{M-h} \end{pmatrix} ,$$

où $\mathbf{f}_i$ désigne le vecteur colonne de $\mathbf{k}^n$ dont les coordonnées correspondent aux i-èmes coefficients des fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$. Notons que la forme de la matrice $\mathcal{S}(\mathbf{f})$ est à rapprocher de celle des matrices de *Toeplitz*. On pose

$$\ker \mathcal{S}(\mathbf{f}) := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbf{k}^n)^{h+1} \mid \boldsymbol{\lambda}\mathcal{S}(\mathbf{f}) = 0 \right\} .$$

Si $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_h)$ appartient à $\ker\mathcal{S}(\mathbf{f})$, on définit le vecteur de polynômes

$$\mathbf{w}(z) := \sum_{i=0}^{h} \mathbf{w}_i z^i \,.$$

Nous avons montré, dans [2, théorème 6.1], qu'alors

$$\langle \mathbf{w}(z), \mathbf{f}(z) \rangle = 0 \,,$$

où $\langle \, , \rangle$ désigne le produit scalaire usuel, et que toutes les relations de dépendance linéaires entre les fonctions $f_i(z)$, $1 \le i \le n$, s'obtiennent de cette manière là. On peut calculer de manière explicite la dimension s du noyau $\ker\mathcal{S}(\mathbf{f})$, ainsi qu'une base $\mathbf{w}_1(z),\ldots,\mathbf{w}_s(z)$ de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z)) := \{\mathbf{w}(z)\in\mathbf{k}(z)^n : \langle\mathbf{w}(z),\mathbf{f}(z)\rangle = 0\}$$

en déterminant une base de $\ker\mathcal{S}(\mathbf{f})$. La dimension du $\mathbf{k}(z)$-espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ vaut donc $r=n-s$, et la matrice

$$\Lambda(z) := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1(z) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_s(z) \end{pmatrix}$$

est de rang s. L'étude des mineurs non nuls de cette matrice nous permet de déterminer les parties $\{f_{i_1}(z),\ldots,f_{i_r}(z)\}$ formées de fonctions linéairement indépendantes. En effet, fixons $i_1,\ldots,i_r$, $1\le i_1<\cdots<i_r\le n$, des entiers distincts. Notons $J:=\{1,\ldots,n\}\setminus\{i_1,\ldots,i_r\}$ et Δ_J le mineur de Λ associé à l'ensemble J, on montre qu'on a l'équivalence
(2.1)

$$\Delta_J = 0 \Leftrightarrow f_{i,1}(z),\ldots,f_{i_r}(z) \text{ sont linéairement dépendantes sur } \mathbf{k}(z).$$

Supposons que $\Delta_J=0$. Il existe un vecteur $\boldsymbol{\mu}(z)\in\mathbf{k}[z]^s$ non nul tel que $\boldsymbol{\kappa}(z):=\boldsymbol{\mu}(z)\Lambda(z)$ est nul sur J, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\kappa}(z):=(\kappa_1(z),\ldots,\kappa_n(z))\in\mathbf{k}[z]^n$ avec $\kappa_i(z)=0$ pour tout i dans J. D'autre part, la matrice Λ étant de rang s, le vecteur $\boldsymbol{\kappa}(z)$ est nécessairement non nul. Il vient donc :

$$\sum_{l=1}^{r}\kappa_{i_l}(z)f_{i_l}(z) = \boldsymbol{\kappa}(z)\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z)\end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}(z)\Lambda(z)\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z)\end{pmatrix} = 0\,,$$

ce qui montre que les fonctions $f_{i_1}(z),\ldots,f_{i_r}(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{k}(z)$.

Réciproquement, supposons que les fonctions $f_{i_1}(z),\ldots,f_{i_r}(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{k}(z)$. Il existe alors un vecteur non nul $\boldsymbol{\kappa}(z):=(\kappa_1(z),\ldots,\kappa_n(z))\in\mathbf{k}[z]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n\kappa_i(z)f_i(z)=0$ et $\kappa_i(z)=0$ pour tout i dans J. Comme les vecteurs $\mathbf{w}_1(z),\ldots,\mathbf{w}_s(z)$ forment une base de $\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$, il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{\mu}(z)\in\mathbf{k}[z]^s$ tel que $\boldsymbol{\mu}(z)\Lambda(z)=\boldsymbol{\kappa}(z)$. Ainsi $\Delta_J=0$.

On peut donc tester algorithmiquement, pour toute sélection d'entiers $i_1,\ldots,i_r$, si les r fonctions $f_{i_1}(z),\ldots,f_{i_r}(z)$ sont linéairement indépendantes. Supposons à présent que ce soit le cas. Quitte à renuméroter, on peut supposer sans perte de généralité qu'il s'agit des fonctions $f_1(z),\ldots,f_r(z)$.

Considérons alors la matrice

$$S(z) := \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \Lambda(z) & & & \\ & & & & & & \end{array}\right).$$

D'après (2.1) cette matrice est inversible, et on a

$$S(z)\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_r(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $B(z)$ le bloc principal $r \times r$ de la matrice $S(z)A(z)S(z^q)^{-1}$. On obtient par construction que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_r(z) \end{pmatrix} = B(z)\begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_r(z^q) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

D'autre part, les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ étant linéairement indépendantes, la matrice $B(z)$ est inversible, et le système (2.2) est bien un système de type (1.2). $\square$

2.1. Détermination de l'équation inhomogène minimale d'une fonction mahlérienne. Soit $f(z)$ une fonction q-mahlérienne définie par une équation de type (1.1). L'espace vectoriel

$$V_f := \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\{1, f(z), f(z^q), f(z^{q^2}), \cdots\}.$$

est donc de dimension finie. Le lemme suivant montre que la dimension de V_f est déterminée par l'ordre de l'équation inhomogène minimale de f.

Lemme 2.2. *Soit $f(z)$ une fonction q-malhérienne d'équation inhomogène minimale*

$$p_{-1}(z) + p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_n(z)f(z^{q^n}) \ = \ 0\,. \tag{2.3}$$

La dimension de l'espace V_f est exactement $n+1$.

Démonstration. Notons $(V_m)_{m\geq 1}$ la suite d'espaces emboîtés

$$V_m := \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\{1, f(z), f(z^q), f(z^{q^2}), \ldots, f(z^{q^m})\}\,.$$

Nous montrons que si $V_{m_0+1} = V_{m_0}$ pour un m_0 fixé, alors $V_m = V_{m_0}$ pour tout $m \geq m_0$. Il suffit en fait de montrer que dans un tel cas, $V_{m_0+2} = V_{m_0+1}$.

Soit m_0 un entier tel que $V_{m_0+1} = V_{m_0}$. On peut trouver des fractions rationnelles $q_{-1}(z), \ldots q_{m_0}(z)$, telles que

$$f(z^{m_0+1}) = q_{-1}(z) + q_0(z)f(z) + \cdots + q_{m_0}(z)f(z^{q^{m_0}})\,.$$

En appliquant cette égalité en z^q, on trouve

$$f(z^{m_0+2}) = q_{-1}(z^q) + q_0(z^q)f(z^q) + \cdots + q_{m_0}(z^q)f(z^{q^{m_0+1}}) \in V_{m_0+1}\,.$$

On en déduit que $V_{m_0+2} = V_{m_0+1}$.

Par minimalité de l'équation (2.3), on a $V_m \subsetneq V_{m+1}$ pour tout $m < n-1$. D'autre part, l'équation (2.3) implique l'égalité d'espaces vectoriels, $V_n = V_{n-1}$. On a donc, par stationnarité, $V_f = V_{n-1}$, et $\dim V_{n-1} = n+1$, ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Remarque 2.3. Soit $f(z)$ solution d'une équation de la forme

$$p_{-1}(z) + p_0(z)f(z) + \cdots + p_n(z)f(z^{q^n}) = 0\ ,$$

où les p_i sont des polynômes non tous nuls. Il est bien connu que l'on peut toujours se ramener explicitement à une équation dans laquelle le polynôme $p_0(z)$ est non nul en utilisant les opérateurs linéaires Λ_i, $0 \leq i < q$, définis par $\Lambda_i(\sum a(n)z^n) := \sum a(qn+i)z^n$ (voir par exemple [4, Chapitre 3] ou pour une référence plus récente [1, Lemma 4.1]) [1]. Nous rappelons ici cette construction. Si $p_0(z) = 0$, on peut plus précisément déterminer une équation

$$\tilde{p}_{-1}(z) + \tilde{p}_0(z)f(z) + \cdots + \tilde{p}_{n-j}(z)f(z^{q^{n-j}}) = 0$$

telle que $\tilde{p}_0(z) \neq 0$, où j désigne le plus petit entier positif tel que $p_j(z) \neq 0$. Pour cela il suffit de décomposer les polynômes p_i selon les puissances de z modulo q^j. On obtient alors

$$p_i(z) := \sum_{k=0}^{q^j-1} p_{i,k}(z^{q^j})z^k$$

et l'équation

$$p_{-1}(z) + p_j(z)f(z^{q^j}) + \cdots + p_n(z)f(z^{q^n}) = 0$$

implique que

$$p_{-1,k}(z) + p_{j,k}(z)f(z) + \cdots + p_{n,k}(z)f(z^{q^{n-j}}) = 0$$

1. Ces opérateurs sont appelés opérateurs de section dans [4] et opérateurs de Cartier dans [1] en référence à leur utilisation dans le cas où le corps de base est de caractéristique non nulle.

pour tout k tel que $0 \leq k < q^j$. Comme $p_j(z) \neq 0$, il existe au moins un entier k_0 tel que $p_{j,k_0}(z) \neq 0$ et il suffit de poser $\tilde{p}_{-1}(z) = p_{-1,k_0}(z)$ et $\tilde{p}_i(z) = p_{i+j,k_0}(z)$ pour $0 \leq i \leq n-j$.

Nous sommes à présent en mesure de décrire l'algorithme 1.3.

Description de l'algorithme 1.3. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que f est donnée comme coordonnée d'un système de type (1.2). En effet, si f est donnée comme solution d'une équation de type (1.1), il suffit de considérer le système compagnon suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \\ \vdots \\ f(z^{q^{n-1}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{p_{-1}(z)}{p_0(z)} & \frac{p_1(z)}{p_0(z)} & \cdots & \cdots & \frac{p_n(z)}{p_0(z)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^n}) \end{pmatrix}.$$

On suppose donc que $f(z)$ est donnée comme coordonnée d'un vecteur solution d'un système de type (1.2). On note $(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ un tel vecteur solution. Quitte à effectuer des permutations sur la matrice $A(z)$ et éventuellement à ajouter la fonction identiquement égale à 1, en changeant la matrice $A(z)$ en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A(z) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

on supposera désormais que $f_1(z) = f(z)$ et $f_n(z) = 1$.

Le théorème 6.1 de [2] permet de déterminer si la fonction $f(z)$ est rationnelle ou non, et le cas échéant, de trouver deux polynôme A et B premiers entre eux tels que $f = A/B$. L'équation minimale inhomogène est alors $A(z) - B(z)f(z) = 0$. Notons que Bell et Coons [3] ont proposé récemment un test similaire permettant de déterminer si une fonction mahlérienne est transcendante ou rationnelle. Ils procèdent en calculant le rang d'une matrice de *Hankel*. Cette matrice semble être de taille plus petite que celle du théorème 6.1 de [2], mais ce dernier prend en considération des relations linéaires plus générales.

On supposera donc à présent que f n'est pas une fraction rationnelle. Dans ce cas, f est nécessairement transcendante sur $\mathbf{k}(z)$, de sorte que 1 et f sont linéairement indépendantes. En appliquant l'algorithme 2.1, on trouve une matrice $B(z)$ inversible, et des fonctions

$$g_1(z) := f(z), g_2(z), \ldots, g_s(z), g_{s+1}(z) := 1$$

linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}(z)$ telles que

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} := B(z) \begin{pmatrix} g_1(z^q) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z^q) \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

En inversant le système, on obtient $f(z^q)$ en fonction de $g_1(z), \ldots, g_{s+1}(z)$,

$$f(z^q) = g_1(z^q) = \boldsymbol{\lambda}_1(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} .$$

En itérant le système (2.4) s fois, et en inversant les matrices $B_l(z) := B(z)B(z^q)\cdots B(z^{q^{l-1}})$, on trouve, pour chaque $l \leq s$, un vecteur $\boldsymbol{\lambda}_l(z)$ tel que

$$f(z^{q^l}) = g_1(z^{q^l}) = \boldsymbol{\lambda}_l(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} .$$

On notera aussi, $\boldsymbol{\lambda}_0 := (0, \ldots, 0, 1)$ de sorte que

$$1 = \boldsymbol{\lambda}_0 \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} .$$

Considérons alors la matrice $C(z)$, dont les lignes sont les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}_l(z)$, $l = 0 \ldots s$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^s}) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_{s+1}(z) \end{pmatrix} .$$

Les fonctions $g_1(z), \ldots, g_{s+1}(z)$ étant linéairement indépendantes, le rang r de $C(z)$ est égal à la dimension de l'espace engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ par les fonctions $1, f(z^q), \ldots, f(z^{q^s})$, c'est à dire, de l'espace $V_g \subset V_f$ où $g(z) := f(z^q)$. Ainsi $\dim V_f \geq r$. Montrons maintenant que $\dim V_f = r$. En effet, d'après le lemme 2.2, il existe $r+1$ polynômes $q_{-1}(z), q_1(z), \ldots, q_r(z)$ tels que

$$q_{-1}(z) + q_1(z)f(z^q) + \cdots + q_r(z)f(z^{q^r}) = 0 .$$

Comme dans la remarque 2.3, en ne regardant que les puissances de z selon leur reste modulo q, on extrait r polynômes $\tilde{q}_{-1}(z), \cdots, \tilde{q}_{r-1}(z)$ tels que

$$\tilde{q}_{-1}(z) + \tilde{q}_0(z)f(z) + \cdots + \tilde{q}_{r-1}(z)f(z^{q^{r-1}}) = 0 \tag{2.5}$$

et $\tilde{q}_0(z) \neq 0$. D'après le lemme 2.2, il vient $\dim V_f \leq r$ et donc $\dim V_f = r$. L'entier r se calcule explicitement puisque c'est simplement le rang de la matrice $C(z)$.

L'équation (2.5) donne alors l'existence d'un vecteur non nul $\boldsymbol{\mu}(z) := (\mu_1(z), \ldots, \mu_r(z), 0, \ldots, 0)$ tel que

$$\boldsymbol{\mu}(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^s}) \end{pmatrix} = f(z) \ \ (= g_1(z)) \ .$$

L'indépendance linéaire des fonctions $g_1(z), \ldots, g_{s+1}(z)$ entraîne que

$$\boldsymbol{\mu}(z)C(z) = (1, 0, \ldots, 0)\,.$$

Un tel vecteur $\boldsymbol{\mu}(z)$ se calcule donc explicitement en résolvant un système linéaire. On obtient alors :

$$\mu_1(z) + \mu_2(z)f(z^q) + \cdots + \mu_r(z)f(z^{q^{r-1}}) = f(z)\,.$$

On note $p_0(z)$ le ppcm des dénominateurs des fractions rationnelles $\mu_i(z)$, puis on pose :

$$p_{-1}(z) := -p_0(z)\mu_1(z) \ \text{ et } \ p_i(z) := -p_0(z)\mu_{i-1}(z) \ , \quad \text{pour } i \in \{1, \ldots, r\}\,.$$

En vertu du lemme 2.2, l'équation

$$p_{-1}(z) + p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_{r-1}(z)f(z^{q^{r-1}}) \ = \ 0$$

est bien l'équation inhomogène minimale de $f(z)$. □

Remarque 2.4. Comme dans le cas différentiel, la notion d'équation minimale est vraiment relative à une solution donnée. L'exemple suivant illustre ce fait en exhibant une équation mahlérienne qui est minimale par rapport à l'une de ses solutions, tout en admettant également une solution qui est une fraction rationnelle. Considérons l'équation fonctionnelle

$$zf(z) - (1 + 2z)f(z^2) + (1 + z)f(z^4) = 0\,. \tag{2.6}$$

On voit rapidement que la fonction identiquement égale à 1 est solution. D'autre part, l'étude des relations entre les coefficients montre qu'il existe une solution analytique dont les premiers coefficients sont

$$f(z) = z + 2z^2 + z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 2z^6 + z^7 + 4z^8 + \cdots \,.$$

Nous allons voir que (2.6) est l'équation minimale de la fonction $f(z)$. Écrivons le système compagnon associé à cette équation :

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2z}{z} & -\frac{1+z}{z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) \\ f(z^4) \end{pmatrix} .$$

Comme dans la description de l'algorithme 2.1, le théorème [2, Théorème 6.2] montre que les fonctions $f(z)$ et $f(z^2)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si la matrice

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

est de rang maximal. On vérifie que le déterminant de la matrice formée par les quatre premières colonnes non nulles vaut 1 et on en déduit que les fonctions $f(z)$ et $f(z^2)$ sont bien linéairement indépendantes. L'équation (2.6) est donc l'équation (homogène) minimale associée à la fonction $f(z)$.

3. Description des algorithmes 1.1 et 1.2

L'algorithme 1.1 est bien sûr un cas particulier de l'algorithme 1.2, mais, pour la clarté de l'exposition, il nous semble préférable de présenter ces deux algorithmes de manière distincte. Nous commençons par décrire l'algorithme 1.1.

Description de l'algorithme 1.1. Une fonction q-mahlérienne $f(z)$ étant donnée par une équation de type (1.1) ou un système de type (1.2), on applique d'abord l'algorithme 1.3 pour déterminer l'équation inhomogène minimale associée à la fonction f. En écrivant cette équation sous forme d'un système, on obtient :

(3.1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(z^{q^{n-1}}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{p_{-1}(z)}{p_0(z)} & \frac{p_1(z)}{p_0(z)} & \cdots & \cdots & \frac{p_n(z)}{p_0(z)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(z^{q^n}) \end{pmatrix} \\ &:= A(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^q) \\ \vdots \\ f(z^{q^n}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Soit ρ, $0 < \rho < 1$, un nombre réel strictement inférieur aux modules des pôles non nuls des coefficients de $A(z)$ et des racines non nulles du déterminant de $A(z)$. La matrice $A(z)$ étant inversible et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, un tel ρ se calcule de manière effective.

Nous montrons dans un premier temps comment déterminer si α est ou non un pôle de f. Observons d'abord que la fonction $f(z)$ est définie sur le disque $D(0,\rho)$. En effet, dans le cas contraire choisissons ξ un pôle de module minimal pour la fonction f, de sorte que $|\xi| \leq \rho$. Par définition de ρ, le nombre ξ ne serait pas un pôle de la matrice $A(z)$. L'équation (3.1) impliquerait alors que ξ serait pôle d'une des fonctions $f(z^q), \dots, f(z^{q^n})$, ce qui contredirait la minimalité de ξ.

On choisit maintenant un entier l tel que $|\alpha^{q^l}| \leq \rho$. En itérant le système 3.1, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(z) \\ \vdots \\ f(z^{q^{n-1}}) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f(z^{q^{l+n-1}}) \end{pmatrix}$$

où $A_l(z) = A(z) \cdots A(z^{q^{l-1}})$. La minimalité du système (3.1) impliquent de plus que les fonctions $1, f(z), \dots, f(z^{q^{n-1}})$ sont linéairement indépendantes. D'après le théorème 1.10 de [2], chaque pôle de $A_l(z)$ est pôle d'au moins une des fonctions $1, f(z), \dots, f(z^{q^{n-1}})$. D'autre part, par choix de l'entier l, α n'est pôle d'aucune des fonctions $f(z^{q^l}), \dots, f(z^{q^{l+n-1}})$. Par conséquent, α est un pôle de $f(z)$ si et seulement si c'est un pôle d'un des coefficients de la deuxième ligne de la matrice $A_l(z)$. Comme $A_l(z)$ se calcule explicitement, on peut déterminer de façon effective si la fonction f est définie ou non au point α.

Supposons à présent que la fonction $f(z)$ est bien définie en α.

Si α n'est pas une racine du déterminant de $A_l(z)$, alors c'est un point régulier pour la matrice $A_l(z)$, par choix de l'entier l. D'après le corollaire 1.5 de [2], les fonctions $1, f(z), \dots, f(z^{q^{n-1}})$ étant linéairement indépendantes, le nombre $f(\alpha)$ est transcendant.

Il reste à traiter le cas où α est une racine du déterminant de $A_l(z)$. Le nombre $f(\alpha)$ est algébrique si, et seulement si, il existe deux nombres algébriques ω_1 et ω_2, non tous nuls, tels que

$$\omega_1 + \omega_2 f(\alpha) = 0\,.$$

D'après le théorème 1.9 de [2], cela est équivalent à l'existence d'un vecteur non nul de la forme $(\omega_1, \omega_2, 0, \dots, 0)$ dans le noyau à gauche de la matrice $A_l(\alpha)$. L'existence d'un tel vecteur peut se tester algorithmiquement. $\square$

Décrivons à présent l'algorithme 1.2.

Description de l'algorithme 1.2. Pour chaque fonction $f_i(z)$, $1 \leq i \leq r$, on dispose d'un système de la forme (1.2). L'algorithme 1.3 nous permet de trouver le système inhomogène minimal associé à chaque fonction $f_i(z)$, $1 \leq i \leq r$. Soit ρ un réel positif tel que les matrices des systèmes sont définies et inversibles sur le disque fermé épointé $D(0,\rho)^\star$, et l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| \leq \rho$. Comme dans la preuve de l'algorithme 1.1, on itère l fois chaque système pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_i(z) \\ \vdots \\ f_i(z^{q^{n_i-1}}) \end{pmatrix} = A_{i,l}(z) \begin{pmatrix} 1 \\ f_i(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_i(z^{q^{l+n_i-1}}) \end{pmatrix}$$

puis déterminer si chaque fonction $f_i(z)$ est définie en α.

On supposera dans la suite que les fonctions $f_i(z)$ sont toutes définies en α. Chaque fonction $f_i(z)$ étant également q^l-mahlérienne, l'algorithme 1.3 permet de déterminer l'équation inhomogène minimale associée :

$$p_{i,-1}(z) + p_{i,0}(z)f_i(z) + p_{i,1}(z)f_i(z^{q^l}) + \cdots + f_i(z^{q^{l+n_i}}) = 0\,.$$

Ainsi, toutes les fonctions $f_i(z), f_i(z^{q^l}), \ldots, f_i(z^{q^{l+n_i}})$ sont définies au point α. En mettant bout à bout les systèmes compagnons associés à ces équations, on obtient un système diagonal par bloc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{l+n_1-1}}) \\ 1 \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_r(z^{q^{l+n_r-1}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(z) & & \\ & \ddots & \\ & & B_r(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{l+n_1}}) \\ 1 \\ f_2(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_r(z^{q^{l+n_r}}) \end{pmatrix}.$$

Le théorème 6.1 de [2] nous permet d'obtenir une base $\mathcal{B}$ de l'espace

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(1, f_1(z), \cdots, f_1(z^{q^{l+n_1-1}}), \ldots, f_r(z^{q^{l+n_r-1}}))\,.$$

Soit S la codimension de cet espace et s la dimension de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$. On choisit, parmi les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$, des fonctions $g_1(z), \ldots, g_s(z)$ linéairement indépendantes telles que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_r(z) \end{pmatrix} = \Gamma(z) \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_s(z) \end{pmatrix}$$

où la matrice $\Gamma(z)$ est définie au point α. Un tel choix de $\Gamma(z)$ se calcule explicitement, comme expliqué ci-après. On construit à partir de $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \cdots, f_r(z))$ et on considère un premier vecteur $\mathbf{q}_1(z) := (q_{1,1}(z), \ldots, q_{1,r}(z))$ dans $\mathcal{B}'$ de sorte que

$$q_{1,1}(z)f_1(z) + \cdots + q_{1,r}(z)f_r(z) = 0\ , \tag{3.2}$$

où les $q_{1,i}(z)$ sont des polynômes premiers entre eux, et on choisit un indice i_1 pour lequel $q_{1,i_1}(\alpha) \neq 0$. On a

$$f_{i_1}(z) = \sum_{i \neq i_1} \frac{-q_{1,i}(z)}{q_{1,i_1}(z)} f_i(z) \, .$$

On choisit alors un second vecteur $\mathbf{q}_2(z)$ dans $\mathcal{B}'$. On peut toujours supposer que $q_{2,i_1}(z) = 0$, quitte à remplacer $\mathbf{q}_2(z)$ par une combinaison linéaire de $\mathbf{q}_2(z)$ et $\mathbf{q}_1(z)$. Il vient

$$\sum_{i \neq i_1} q_{2,i}(z) f_i(z) = 0 \ .$$

On fixe ensuite i_2, tel que $q_{2,i_2}(\alpha) \neq 0$ et on écrit

$$f_{i_2}(z) = \sum_{i \neq i_1, i_2} \frac{-q_{2,i}(z)}{q_{2,i_2}(z)} f_i(z) \ .$$

En itérant ce procédé, on obtient des entiers distincts $i_1, i_2, \ldots, i_{r-s}$ tels que :

$$f_{i_k}(z) = \sum_{i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k} \frac{-q_{k,i}(z)}{q_{k,i_k}(z)} f_i(z) \tag{3.3}$$

et $q_{k,i_k}(\alpha) \neq 0$ pour tout k, $1 \leq k \leq r-s$. On choisit $g_1, \ldots, g_s$ de sorte que $\{g_1, \ldots, g_s\} = \{f_i : i \neq i_1, i_2, \ldots, i_{r-s}\}$. Les équations (3.3) permettent d'exprimer chaque f_{i_k} comme une combinaison linéaire définie en α des fonctions $g_1, \ldots, g_s$, d'où l'on tire $\Gamma(z)$.

On a alors l'inclusion suivante entre l'ensemble $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha))$ et l'ensemble $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha))$:

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) \cdot \Gamma(\alpha) \subset \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha)) \, . \tag{3.4}$$

En appliquant l'algorithme 2.1, on complète les fonctions $g_1(z), \ldots, g_s(z)$ en un système

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_S(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} g_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ g_S(z^{q^l}) \end{pmatrix}$$

dans lequel les fonctions $g_1(z), \ldots, g_S(z)$ sont linéairement indépendantes. Comme les fonctions $g_1, \ldots, g_S$ sont définies en α, le théorème 1.10 de [2] implique que la matrice $A(z)$ est bien définie en α. D'après le théorème 1.9 de [2], on a l'égalité

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_S(\alpha)) = \ker_g A(\alpha),$$

où $\ker_g A(\alpha)$ désigne le noyau à gauche de $A(\alpha)$. En ne considérant que les vecteurs de $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_S(\alpha))$ nuls sur les $S-s$ dernières coordonnées, on peut déterminer une base $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_t$ de l'espace $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha))$. On peut alors calculer de manière explicite une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha))$, en résolvant dans $\overline{\mathbb{Q}}^r$ les systèmes linéaires

$$(x_1, \ldots, x_r).\Gamma(\alpha) = \boldsymbol{\mu}_i \ ,$$

ce qui termine cette démonstration. □

4. Détermination des solutions analytiques d'une équation mahlérienne

Dans cette partie nous reprenons les travaux de Dumas [4]. Nous montrons comment calculer de manière effective, à partir des premiers coefficients d'une solution d'équation mahlérienne, des coefficients arbitrairement élevés de la fonction. Les démonstrations fourniront au passage une méthode pour déterminer une base de solutions analytiques d'une équation mahlérienne. Nous abordons séparément le cas d'une équation de type (1.1) et d'un système de type (1.2).

Étant donnée une équation de la forme (1.1), notons ν_i la valuation du polynôme $p_i(z)$ à l'origine pour $0 \leq i \leq n$. Définissons alors l'entier d par :

$$d := \max \left\{ \left\lfloor \frac{\nu_0 - \nu_i}{q^i - 1} \right\rfloor ,\ 1 \leq i \leq n \right\} . \tag{4.1}$$

De [4, Théorème 5], on tire le résultat suivant, que nous redémontrons ici.

Lemme 4.1. *Soit $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ une solution de l'équation (1.1). Alors, si $d < 0$, cette solution est unique et l'équation permet de déterminer tous les coefficents f_k. De plus $f(z)$ est nulle si, et seulement si, $p_{-1}(z) = 0$. Si $d \geq 0$, les coefficients f_k, pour $k > d$, sont déterminés de manière unique par les coefficients f_k, pour $k \leq d$.*

Démonstration. Si k appartient à $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, on pose $f_k := 0$. Dans l'équation (1.1), on isole $f(z)$

$$f(z) = -\frac{p_{-1}(z)}{p_0(z)} - \frac{p_1(z)}{p_0(z)} f(z^q) - \cdots - \frac{p_{-n}(z)}{p_0(z)} f(z^{q^n}). \tag{4.2}$$

Considérons alors le développement en série de Laurent des fractions rationnelles $-p_i(z)/p_0(z)$, $-1 \leq i \leq n$, et notons :

$$-\frac{p_i(z)}{p_0(z)} := \sum_{k \geq \nu_i - \nu_0} p_{i,k} z^k \, .$$

Pour tout entier $k \geq 0$, l'étude du terme de valuation k dans l'équation (4.2) donne la relation suivante :

$$f_k = p_{-1,k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\nu_i-\nu_0}^{k} p_{i,j} f_{\frac{k-j}{q^i}} \, . \tag{4.3}$$

Si $k > d$, alors

$$k > \frac{\nu_0 - \nu_i}{q^i - 1}$$

pour chaque i, $1 \leq i \leq n$. On vérifie que cela implique, pour tout $j \geq \nu_i - \nu_0$ que

$$\frac{k-j}{q^i} < k\,.$$

On en déduit que le coefficient f_k est déterminé de manière unique par les coefficients f_l pour $l < k$.

En particulier, si $d < 0$, les coeffcients f_k sont tous uniquement déterminés par (4.3). Cette dernière implique de plus que ces coefficients sont tous nuls si, et seulement si, $p_{-1,k} = 0$ pour tout k. □

Étant donnée une équation de la forme (1.1), le lemme 4.1 nous permet de déterminer l'espace affine des solutions analytiques. Si $d < 0$, cet espace est réduit à une unique fonction, laquelle est entièrement déterminée par (4.3). Si $d \geq 0$, il suffit de résoudre dans $\mathbf{k}^{d+1}$ les $d+1$ équations affines (4.3), pour $0 \leq k \leq d$. On déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 4.2. *Étant donné une équation de type* (1.1)*, notons ν_0 la valuation du polynôme $p_0(z)$. La dimension de l'espace affine des solutions analytiques de cette équation est au plus $1 + \frac{\nu_0}{q-1}$. En particulier, on peut la majorer indépendamment de n.*

Pour les systèmes de type (1.2), nous obtenons un résultat similaire.

Lemme 4.3. *Soit $\mathbf{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k z^k$ un vecteur non nul de fonctions analytiques solution d'un système de type* (1.2)*. Soit ν le minimum des valuations en $z = 0$ des coefficients de la matrice $A(z)$. Alors, on a $\nu \leq 0$ et les vecteurs de coefficients $\mathbf{f}_k$ pour $k > \left\lfloor \frac{-\nu}{q-1} \right\rfloor$ sont déterminés de manière unique par les vecteurs de coefficients $\mathbf{f}_k$ pour $k \leq \left\lfloor \frac{-\nu}{q-1} \right\rfloor$.*

Démonstration. Les coefficients de la matrice $A(z)$ sont des fractions rationnelles. On peut donc considérer le développement en série de Laurent de la matrice $A(z)$,

$$A(z) := \sum_{k \geq \nu} A_k z^k, \qquad A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k})$$

où A_ν est une matrice non nulle. La relation matricielle entre $\mathbf{f}(z)$ et $\mathbf{f}(z^q)$ implique les relations suivantes entre les coefficients

$$\mathbf{f}_k = \sum_{r=\nu}^{k} A_r \mathbf{f}_{\frac{k-r}{q}}\,, \tag{4.4}$$

où l'on convient que $\mathbf{f}_{\frac{k-r}{q}} = 0$ si q ne divise pas $k - r$. Si $\nu > 0$, alors $\mathbf{f}$ est identiquement nulle. En effet, en considérant k_0 le plus petit entier tel que $\mathbf{f}_{k_0} \neq 0$, l'équation (4.4) serait contradictoire. Supposons maintenant que $\nu \leq 0$. Si l'entier k est strictement supérieur à $\frac{-\nu}{q-1}$, alors $kq > k - \nu$ et pour tout $r \geq \nu$,

$$k > \frac{k-r}{q}$$

et l'équation (4.4) permet de définir de manière unique le vecteur $\mathbf{f}_k$ en fonctions des vecteurs $\mathbf{f}_l$ avec $0 \leq l < k$. $\square$

Bibliographie

[1] B. Adamczewski and J. Bell, *A problem about Mahler functions*, to appear in Ann. Sc. Norm. Super. DOI : 10.2422/2036 − 2145.201606_010.

[2] B. Adamczewski, C. Faverjon, *Méthode de Mahler : relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques*, à paraître dans les Proc. London Math. Soc., `arXiv:1508.07158 [math.NT]`.

[3] J. P. Bell, M. Coons, *Transcendence tests for Mahler functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 1061–1070

[4] P. Dumas, *Récurrences mahlériennes, suites automatiques, études asymptotique Mathématiques*, Thèse, Université de Bordeaux I, Talence, 1993.

[5] P. Philippon, *Groupes de Galois et nombres automatiques*, J. London Math. Soc. **92** (2015), 596–614.

[6] B. Randé, *Equations fonctionnelles de Mahler et applications aux suites p-régulières*, Thèse, Université de Bordeaux I, Talence, 1992.

Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1
CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan
43 blvd du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail : `Boris.Adamczewski@math.cnrs.fr`

Collège Jean Moulin
76, rue Henri Barbusse
93300 Aubervilliers, France
E-mail : `colin.faverjon@ac-creteil.fr`