RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE VALEURS DE E-FONCTIONS OU DE M-FONCTIONS

BORIS ADAMCZEWSKI AND COLIN FAVERJON

Résumé. Nous montrons que *toutes* les relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les valeurs prises par des E-fonctions de Siegel en un point algébrique non nul sont d'origine fonctionnelle, en ce sens qu'elles s'obtiennent par dégénérescence de relations algébro-différentielles sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions considérées. Nous obtenons un résultat analogue pour les M_q-fonctions de Mahler, dans lequel les relations dites σ_q-algébriques se substituent aux relations algébro-différentielles. Nous donnons également plusieurs conséquences de ce résultat, notamment concernant certains phénomènes de descente. Le point de vue adopté révèle des similitudes frappantes entre la théorie des E-fonctions et celle des M_q-fonctions.

1. Introduction

La théorie des nombres transcendants est mue par deux objectifs principaux. Un ensemble de nombres complexes Ξ étant fixé, il s'agit d'une part d'être capable de déterminer, pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \Xi$, l'ensemble des relations algébriques ou linéaires entre ces nombres sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques ou un sous-corps de ce dernier et, d'autre part, d'en trouver la *raison d'être*. Ces deux problèmes sont naturellement liés et le second, plus ambigu, dépend bien sûr de la façon dont les éléments de Ξ sont définis.

Par exemple, si Ξ désigne l'anneau des périodes, une conjecture de Grothendieck prédit que les relations algébriques sont nécessairement d'origine motivique, ce qui répondrait dans ce cadre au second objectif tout en offrant un outil puissant pour atteindre le premier. Une formulation plus élémentaire, bien qu'équivalente, est donnée par la conjecture de Kontsevich et Zagier qui stipule que toute relation algébrique entre périodes découle des règles fondamentales de l'intégration que sont l'additivité, le changement de variables et la formule de Stokes. Pour davantage de détails sur ces deux conjectures et leurs liens voir [25, 26]. Si à présent on choisit pour Ξ l'ensemble $\{(1/\sqrt{2\pi})\Gamma(r) : r \in \mathbb{Q}\}$, où Γ est la fonction gamma d'Euler, la conjecture de Rohrlich-Lang prédit que les relations algébriques proviennent nécessairement de relations fonctionnelles strandard associées à Γ (voir, par exemple, [36, Conjecture 22]). Outre le fait de s'inscrire dans une ambition commune, ces différentes conjectures ont pour point commun d'être considérées comme totalement hors de portée des méthodes actuelles.

Considérons des fonctions analytiques $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ dont le développement de Taylor à l'origine est à coefficients algébriques et un nombre algébrique non nul α appartenant à un domaine d'analyticité commun contenant 0. Dans ce contexte, les relations fonctionnelles, lorsqu'il en existe, sont une source évidente de relations entre les nombres $f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha)$. En effet, s'il existe une relation algébrique homogène non triviale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre $f_1(z),\ldots,f_r(z)$, c'est-à-dire s'il existe un polynôme $Q\in\overline{\mathbb{Q}}[z,X_1,\ldots,X_r]$ non nul, homogène en les variables $X_1,\ldots,X_r$, tel que

$$Q(z,f_1(z),\ldots,f_r(z))=0\,,$$

on obtient par spécialisation au point α une relation homogène de même degré, à savoir

$$P(f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha))=0\,,$$

où $P(X_1,\ldots,X_r):=Q(\alpha,X_1,\ldots,X_r)$ [1]. Une telle relation sera dite *banale*, tandis que les relations algébriques homogènes ne pouvant s'obtenir de cette façon seront qualifiées de *non banales*. Trouver les relation banales entre les nombres $f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha)$ revient donc à déterminer l'idéal des relations algébriques homogènes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f_1(z),\ldots,f_r(z)$. Ce n'est généralement pas une tâche aisée, mais lorsque les fonctions en question sont liées par des équations différentielles ou aux différences linéaires, les théories galoisiennes associées permettent d'obtenir des résultats probants (voir [31, 32]).

Notons que même dans des cas très simples, les relations banales n'épuisent pas nécessairement l'ensemble des relations algébriques. Par exemple, la fonction $f(z):=(z-1)e^z$ étant non nulle, la relation $f(1)=0$ ne peut être banale. On peut néanmoins trouver une origine fonctionnelle à cette relation. En effet, celle-ci s'obtient par spécialisation au point $z=1$ de la relation différentielle

$$zf(z)-(z-1)f'(z)=0\,. \tag{1.1}$$

Comme le coefficient de f' s'annule en $z=1$, on dira que cette relation *dégénère* au point 1. Le lecteur, ou la lectrice, prendra garde au fait que le caractère banale d'une relation est relatif et se détermine au regard d'un ensemble de fonctions préalablement fixé. Ainsi, la relation $f(1)=0$ est non banale relativement à l'ensemble $\{f(z)\}$, mais elle est banale, d'après (1.1), relativement à l'ensemble $\{f(z),f'(z)\}$.

Dans cet article, nous étudions le cas où l'ensemble Ξ est composé des valeurs prises en un point $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^*$ par les éléments de l'anneau des E-fonctions de Siegel ou de celui des M_q-fonctions de Mahler. Notons que comme la fonction constante égale à 1 est à la fois une E-fonction et une M_q-fonction, le fait de se concentrer sur les relations homogènes n'est aucunement restrictif. Le théorème 1.1 ci-après montre que dans le cadre des E-fonctions, dont f est justement un exemple, toutes les relations algébriques non banales s'obtiennent par dégénérescence de relations fonctionnelles algébro-différentielles, c'est-à-dire de façon similaire à (1.1). Il fournit également un résultat analogue pour les M_q-fonctions, dans lequel les relations dites σ_q-algébriques se substituent aux relations algébro-différentielles. Le point de vue adopté révèle des similitudes frappantes entre ces deux théories qu'il serait intéressant de développer plus avant. Celles-ci sont d'autant plus étonnantes que les E- et les M_q-fonctions sont de nature très différente. Par exemple, les

1. On suppose sans perte de généralité que les coefficients de Q vu comme un polynôme en les variables $X_1,\ldots,X_r$ sont premiers entre eux dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, de sorte que P est non nul.

E-fonctions sont entières, alors qu'une M_q-fonction qui n'est pas rationnelle admet le cercle unité comme coupure et est différentiellement transcendante (voir [7, 16]).

1.1. **Résultats principaux.** Notons $\delta := \frac{d}{dz}$ et, pour tout entier $k \geq 0$, $\delta^k(f) = f^{(k)}(z)$. Une E-fonction est une série formelle de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ qui satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, c'est-à-dire qu'il existe des polynômes $p_0(z), \dots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, non tous nuls, tels que

$$p_0 f + p_1 \delta(f) + \cdots + p_m \delta^{(m)}(f) = 0\,,$$

et dont la croissance arithmétique des coefficients est limitée par les deux conditions suivantes : il existe $C > 0$ et une suite d'entiers $d_n \geq 1$ tels que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et tout entier $n \geq 1$, on a $|\sigma(a_n)| \leq C^n$, $d_n \leq C^n$ et $d_n a_i$ est un entier algébrique pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

Pour tout entier $q \geq 2$, désignons par σ_q l'endomorphisme injectif de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ défini par $\sigma_q(f) = f(z^q)$, de sorte que, pour tout entier $k \geq 0$, $\sigma_q^k(f) = f(z^{q^k})$. Une M_q-fonction est une série formelle de la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ qui satisfait à une équation aux différences σ_q-linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, c'est-à-dire qu'il existe des polynômes non tous nuls $p_0(z), \dots, p_m(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, tels que

$$p_0 f + p_1 \sigma_q(f) + \cdots + p_m \sigma_q^m(f) = 0\,. \tag{1.2}$$

Rappelons qu'une M_q-fonction est convergente (cf. [16, Lemma 4]) et admet donc, d'après (1.2) un prolongement méromorphe dans le disque unité ouvert. L'ensemble des M_q-fonctions dépend de façon radicale du paramètre q (voir, par exemple, [1, 8, 5]). L'appellation M-fonction est également utilisée, comme dans le titre du présent article, lorsqu'il n'est pas nécessaire de spécifier le paramètre q.

Étant données $f_1(z), \dots, f_r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$, on notera

$$\mathfrak{I}(f_1, \dots, f_r) := \left\{ Q \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1, \dots, X_r] : Q(z, f_1(z), \dots, f_r(z)) = 0 \right\}$$

l'idéal des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre ces séries formelles. L'idéal des relations algébro-différentielles, ou δ-algébriques, c'est-à-dire l'idéal des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre $f_1(z), \dots, f_r(z)$ et leurs dérivées successives, est noté

$$\mathfrak{I}^{\delta}(f_1, \dots, f_r) := \left\{ Q \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r,\, j\in\mathbb{N}}] : Q(z, \delta^j(f_i(z))_{1\leq i\leq r,\, j\geq 0}) = 0 \right\}.$$

De façon similaire, on note $\mathfrak{I}^{\sigma_q}(f_1, \dots, f_r)$ l'idéal des relations σ_q -algébriques, c'est-à-dire l'idéal des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre $f_1, \dots, f_r$ et leurs images successives par l'opérateur σ_q. Une relation Q, δ-algébrique ou σ_q-algébrique, est dite homogène si Q est homogène en les variables $X_{i,j}$. En identifiant les variables $X_1, \dots, X_r$ et $X_{1,0}, \dots, X_{r,0}$, on obtient que

$$\mathfrak{I}(f_1, \dots, f_r) \subset \mathfrak{I}^{\delta}(f_1, \dots, f_r) \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(f_1, \dots, f_r) \subset \mathfrak{I}^{\sigma_q}(f_1, \dots, f_r)\,.$$

Une relation δ-algébrique $Q \in Q[z, (X_{i,j})_{1\leq i\leq r,\, j\in\mathbb{N}}]$ *dégénère* en α si

$$Q \in \mathfrak{I}^{\delta}(f_1, \dots, f_r) \setminus \mathfrak{I}(f_1, \dots, f_r) \quad \text{et} \quad Q(\alpha, (X_{i,j})) \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]\,.$$

La dégénérescence d'une relation σ_q-algébrique est définie de façon similaire.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cet article.

Théorème 1.1. *On a les deux résultats suivants.*

(E) *Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ des E-fonctions et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. Toute relation algébrique homogène sur $\overline{\mathbb{Q}}$ non banale entre $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ peut s'obtenir par dégénérescence en α d'une relation δ-algébrique homogène entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$.*

(M_q) *Soient $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ des M_q-fonctions et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point qui n'est un pôle d'aucune de ces fonctions. Toute relation algébrique homogène sur $\overline{\mathbb{Q}}$ non banale entre $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ peut s'obtenir par dégénérescence en α d'une relation σ_q-algébrique homogène entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$.*

Remarque 1.2. Dans le cas (E), ce résultat repose sur deux ingrédients : un raffinement qualitatif du théorème de Siegel-Shidlovskii obtenu par Beukers [17] et le fait, démontré par André [11], que toute E-fonction est annulée par un E-opérateur différentiel. Les théorèmes de Siegel-Shidlovskii et de Beukers imposent aux fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ d'être liées par un système différentiel linéaire et au point α d'être un point régulier pour ce système (voir section 2.1). L'apport du théorème 1.1 est de supprimer ces deux restrictions. La démonstration du cas (M_q) est similaire : nous substituons au théorème de Beukers un résultat analogue dû à Philippon [30] et aux auteurs [3], et nous introduisons la notion de M_q-opérateur qui remplace celle de E-opérateur.

La *profondeur* d'une relation Q, δ-algébrique ou σ_q-algébrique, est le plus petit entier s tel que le support de Q est inclus dans $\{(i,j) : 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s\}$. Dans le cas (E), nous verrons que toutes les relations algébriques s'obtiennent par dégénérescence de relations δ-algébriques dont la profondeur est bornée indépendamment du point α. Ceci n'est plus vrai dans le cas (M_q) (cf. exemple 8.3), mais la profondeur peut toutefois être bornée en fonction de R pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $0 < |\alpha| < R < 1$.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. Notons $\mathbf{E} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble formé des évaluations de toutes les E-fonctions au point α. Comme l'anneau des E-fonctions est stable par le changement de variabe $z \mapsto \alpha z$, $\mathbf{E}$ ne dépend pas du choix de α. Étant donné un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$, on note $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble formé de l'évaluation en $z = 1$ de toutes les E-fonctions à coefficients dans $\mathbb{K}$, de sorte que $\mathbf{E} = \cup_{\mathbb{K}} \mathbf{E}_{\mathbb{K}}$. De façon similaire, notons $\mathbf{M}_{q,\alpha}$ l'ensemble formé des évaluations au point α de toutes les M_q-fonctions qui n'ont pas de pôle en α et $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ l'ensemble formé des évaluations au point α de toutes les M_q-fonctions à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui n'ont pas de pôle en α. Cette fois-ci, les ensembles obtenus dépendent de façon radicale du point α et du paramètre q [5]. Les ensembles $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$, $\mathbf{M}_{q,\alpha}$ et $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ sont tous des anneaux.

Le résultat suivant découle directement du théorème 1.1 (cf. section 6).

Corollaire 1.3. *Soient $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$. On a les deux résultats suivants.*

(E) *Des éléments de $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si, et seulement si, ils le sont sur $\mathbb{K}$. En outre, les $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbres $\mathbf{E}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{E}$ sont isomorphes, un isomorphisme étant donné par l'application qui envoie $\xi \otimes \beta$ sur $\xi\beta$.*

(M_q) *Des éléments de* $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ *sont linéairement dépendants sur* $\overline{\mathbb{Q}}$ *si, et seulement si, ils le sont sur* $\mathbb{K}$. *En outre, les* $\overline{\mathbb{Q}}$*-algèbres* $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{Q}}$ *et* $\mathbf{M}_{q,\alpha}$ *sont isomorphes, un isomorphisme étant donné par l'application qui envoie* $\xi \otimes \beta$ *sur* $\xi\beta$.

Le cas (E) a été obtenu indépendamment par Fischler et Rivoal [24, Theorem 2]. Le cas (M_q) est dû aux auteurs [3, théorème 1.7]. Le théorème 1.1 permet d'obtenir une démonstration unifiée des deux cas.

1.2. **Organisation de l'article.** La démonstration du théorème 1.1 occupe la section 2. Dans la section 3, nous expliquons brièvement comment le théorème 1.1 peut être utilisé pour atteindre le premier objectif évoqué, à savoir la détermination effective des relations algébriques entre les valeurs prises par des E- ou des M_q-fonctions fixées en un point algébrique α lui-aussi fixé. Une caractéristique fondamentale des relations banales est leur *permanence* : l'existence d'une relation banale en un point α implique l'existence d'une relation de même type (i.e. banale et homogène de même degré) en tout point algébrique non nul du domaine d'analyticité commun aux fonctions sous-jacentes. Dans le cadre des E- et des M_q-fonctions, nous montrons dans la section 4 que les relations non banales sont quant à elles *sporadiques*. Nous décrivons brièvement la structure des idéaux de la forme $\mathfrak{I}^{\delta}(f_1, \ldots, f_r)$ et $\mathfrak{I}^{\sigma_q}(f_1, \ldots, f_r)$ dans la section 5. Dans la section 6, nous montrons comment le corollaire 1.3 découle du théorème 1.1 et nous mentionnons également quelques conséquences directes de ce résultat. La section 7 est inspirée par l'article récent [24] de Fischler et Rivoal. Nous y montrons comment utiliser le théorème 1.1 pour obtenir l'analogue dans le cas des M_q-fonctions de certains de leurs résultats. Là encore, le théorème 1.1 permet de déduire de façon unifiée les résultats obtenus pour les E- et pour les M_q-fonctions. Dans la section 8, nous illustrons le théorème 1.1 à travers quelques exemples.

2. Preuve du théorème 1.1

Dans cette section, nous démontrons le théorème 1.1. Pour ce faire, nous rappelons quelques résultats concernant les E- et les M_q-fonctions, puis nous introduisons la notion de M_q-opérateur (de niveau R) qui jouera dans la preuve du cas (M_q) du théorème 1.1, le rôle joué par les E-opérateurs différentiels dans le cas (E).

2.1. **Rappels concernant la théorie les E-fonctions.** Étant donné un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$\mathbf{Y}'(z) = A(z)\mathbf{Y}(z)\,, \qquad A(z) \in \mathcal{M}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))\,, \tag{2.1}$$

le point $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit régulier si la matrice $A(z)$ est bien définie en α et singulier sinon. Considérons un opérateur différentiel

$$L = a_0(z) + a_1(z)\delta + \cdots + a_m(z)\delta^m \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \delta]\,,$$

tel que les polynômes $a_0(z), \ldots, a_m(z)$ sont premiers entre eux. Les singularités de L sont les racines du polynôme $a_m(z)$, lesquelles correspondent également aux singularités du système différentiel associé à la matrice compagnon de L :

$$A_L := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(z)}{a_m(z)} & -\frac{a_1(z)}{a_m(z)} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{m-1}(z)}{a_m(z)} \end{pmatrix}.$$

Le résultat fondamental de la théorie des E-fonctions est le théorème de Siegel-Shidlovskii (voir, par exemple, [35]).

Théorème E1. *Soient $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ des E-fonctions formant un vecteur solution d'un système différentiel linéaire de la forme (2.1) et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ un point régulier relativement à ce système. Alors, on a*

$$\operatorname{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)) = \operatorname{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_m(z))\,.$$

Le théorème E1 est un énoncé quantitatif exprimant une égalité de dimension, à savoir celle des dimensions de Krull des anneaux $\overline{\mathbb{Q}}[f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)]$ et $\overline{\mathbb{Q}}(z)[f_1(z),\ldots,f_m(z)]$. Dans [17], Beukers a obtenu un raffinement remarquable du théorème de Siegel-Shidlovskii ; il s'agit d'un énoncé qualitatif qui tient compte de chaque relation algébrique homogène sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ et qui peut s'énoncer comme suit.

Théorème E2. *Sous les hypothèses du théorème E1, toute relation algébrique homogène sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)$ est banale.*

Dans [11], André introduit la notion de E-opérateur différentiel et montre que toute E-fonction est annulée par un tel opérateur. La démonstration du théorème E2 par Beukers repose sur ce résultat d'André et plus précisément sur le fait que les seules singularités d'un E-opérateur sont 0 et ∞. André [13] a également montré comment déduire le théorème E2 du théorème de Siegel-Shidlovskii en développant une nouvelle correspondance de Galois pour les systèmes différentiels linéaires.

2.2. **Rappels concernant la théorie des M_q-fonctions.** Tout comme dans le cas différentiel, il est parfois plus commode de travailler avec des systèmes q-mahlériens linéaires d'ordre 1, plutôt qu'avec des équations q-mahlériennes. De tels systèmes sont de la forme :

$$\mathbf{Y}(z^q) = A(z)\mathbf{Y}(z)\,, \qquad A(z) \in \mathrm{GL}_m(\overline{\mathbb{Q}}(z))\,. \tag{2.2}$$

Le point $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit régulier si la matrice $A(z)$ est bien définie et inversible en α^{q^ℓ} pour tout $\ell \geq 0$.

L'analogue du théorème de Siegel-Shidlovskii dans ce cadre est un théorème de Ku. Nishioka [29].

Théorème M1. *Soient $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ des M_q-fonctions formant un vecteur solution d'un système mahlérien linéaire de la forme (2.2) et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point régulier relativement à ce système. Alors, on a*

$$\operatorname{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha),\ldots,f_m(\alpha)) = \operatorname{deg.tr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_m(z))\,.$$

L'analogue du théorème E2 a été obtenu dans [3] à partir d'une version légèrement plus faible [2] démontrée par Philippon [30] .

Théorème M2. *Sous les hypothèses du théorème M1, toute relation algébrique homogène sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ est banale.*

Dans [3, 30], le théorème M2 est déduit du théorème M1 (voir également [28] pour une démonstration analogue à celle donnée par André [13] du théorème E2). Une nouvelle preuve des théorèmes M1 et M2, ainsi que leurs généralisations à des fonctions mahlériennes de plusieurs variables, ont été récemment obtenues par les auteurs (voir [5, 6]). Dans cette approche, on démontre directement le théorème M2 et on en déduit le théorème M1 par un argument déjà utilisé par Shidlovskii dans sa preuve du théorème E1.

2.3. **M_q-opérateurs.** Considérons un σ_q-opérateur

$$L = a_0(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots + a_m(z)\sigma_q^m \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \sigma_q]\,,$$

tel que les polynômes $a_0(z), \ldots, a_m(z)$ sont premiers entre eux. Un point $\alpha \in \mathbb{C}$ est dit régulier pour L s'il l'est pour le système q-mahlérien associé à la matrice compagnon A_L, ou de façon équivalente si

$$a_0(\alpha^{q^\ell})a_m(\alpha^{q^\ell}) \neq 0 \qquad \forall \ell \geq 0\,.$$

Dans le cas contraire, on dit que α est une singularité de L.

Dans toute la suite, $D(0,R) \subset \mathbb{C}$ désignera le disque ouvert de rayon R et on notera $D^*(0,R) := D(0,R) \setminus \{0\}$ le disque épointé de même rayon.

Définition 2.1. Soit R, $0 < R \leq 1$ un nombre réel. Un M_q-opérateur de niveau R est un σ_q-opérateur de la forme

$$a_0(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots + a_m(z)\sigma_q^m \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \sigma_q]\,,$$

tel que le polynôme $a_0(z)$ n'a aucune racine dans $D^*(0,R)$.

Lemme 2.2. *Soit R, $0 < R \leq 1$, un nombre réel. Toute solution dans $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ d'un M_q-opérateur de niveau R est analytique sur $D(0,R)$.*

Démonstration. Soit $L := a_0(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots + a_m(z)\sigma_q^m$ un M_q-opérateur de niveau R et $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ une M_q-fonction annulée par L. Raisonnons par l'absurde en supposant que le rayon de convergence de f soit égal à $\rho < R$. Notons que $\rho > 0$ puisque $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ et que toute série formelle solution d'une équation mahlérienne linéaire est convergente. En écrivant

$$f(z) = \frac{-1}{a_0(z)}\left(a_1(z)f(z^q) + \cdots + a_m(z)f(z^{q^m})\right)\,,$$

on constate que le membre de droite a un rayon de convergence au moins égal à $\max(\rho^{1/q}, R) > \rho$, puisque par définition $a_0(z)$ ne s'annule pas sur $D^*(0,R)$. Ceci contredit notre hypothèse. □

Le lemme 2.2 admet la réciproque suivante.

Proposition 2.3. *Soit R, $0 < R \leq 1$, un nombre réel. Toute M_q-fonction qui est analytique sur $D(0,R)$ est annulée par un M_q-opérateur de niveau R.*

2. La version obtenue dans [30] ne tient pas compte du caractère homogène des relations.

Démonstration. Le *dénominateur q-mahlérien* d'une M_q-fonction f est défini comme le générateur (choisi unitaire) de l'idéal principal

$$\left\{ p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z] \; : \; p(z)f(z) \in \sum_{k\geq 1} \overline{\mathbb{Q}}[z]f(z^{q^k}) \right\}.$$

Cette notion est introduite dans [2]. Notons $\mathfrak{d}(z)$ le dénominateur q-mahlérien de f. D'après [2, Proposition 6.4], si $\mathfrak{d}$ a une racine λ telle que $0 < |\lambda| < 1$, alors f a un rayon de convergence strictement inférieur à 1. En réalité, la preuve de cette proposition établit explicitement que le rayon de convergence de f est alors au plus $|\lambda|$. Ainsi si f est analytique sur le disque $D(0, R)$, son dénominateur q-mahlérien ne peut s'annuler sur ce disque. On en déduit l'existence d'un M_q-opérateur de niveau R, de la forme

$$L = \mathfrak{d}(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots a_m(z)\sigma_q^m,$$

qui annule f. □

Remarque 2.4. La proposition 6.4 de [2] sur laquelle repose la démonstration précédente est loin d'être triviale : elle nécessite l'utilisation du théorème M2.

Proposition 2.5. *Soit f une M_q-fonction analytique sur $D(0, R)$, $0 < R < 1$. Alors f est annulée par un σ_q-opérateur L sans singularités sur $D^*(0, R)$.*

Remarque 2.6. À la différence de la proposition 2.3, on suppose que $R < 1$ dans l'énoncé de la proposition 2.5. En effet, l'existence d'un M_q-opérateur sans singularités n'est pas garantie si $R = 1$. Considérons par exemple la M_q-fonction $f(z) = \prod_{k\geq 0}(1 - 2z^{q^k})$ qui est analytique sur $D(0, 1)$. On déduit du théorème M2 et du fait que f s'annule en une infinité de points algébriques du disque unité, que tout σ_q-opérateur annulant f a une infinité de singularités dans $D(0, 1)$.

Démonstration. D'après la proposition 2.3, il existe un M_q-opérateur de niveau R qui annule f. Notons

$$L_1 := a_0(z) + a_1(z)\sigma_q + \cdots + a_m(z)\sigma_q^m$$

un tel opérateur. Considérons un entier $s \geq 1$ tel que $a_m(z^{q^s})$ n'a aucune racine dans $D^*(0, R)$ et posons

$$L_2 := \sigma_q^s(L_1) = a_0(z^{q^s})\sigma_q^s + \cdots + a_m(z^{q^s})\sigma_q^{m+s}.$$

Puisque $L_1(f) = 0$, on a également $L_2(f) = 0$ et l'opérateur $L := L_1 + L_2$ annule donc f. De plus, on a

$$L = b_0(z) + b_1(z)\sigma_q + \cdots + b_{m+s}\sigma_q^{m+s},$$

où $b_0(z) = a_0(z)$ et $b_{m+s}(z) = a_m(z^{q^s})$.

Soit $\alpha \in D^*(0, R)$. Comme les polynômes $a_0(z)$ et $a_m(z^{q^s})$ ne s'annulent pas sur $D^*(0, R)$, on obtient que

$$b_0(\alpha^{q^\ell})b_{m+s}(\alpha^{q^\ell}) \neq 0 \qquad \forall \ell \geq 0.$$

Ainsi α est un point régulier pour L. □

2.4. **Preuve du théorème 1.1.** Nous pouvons à présent démontrer notre résultat principal.

Démonstration du théorème 1.1. Commençons par le cas (E). Considérons des E-fonctions $f_1, \dots, f_r$, un nombre $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et supposons qu'il existe un polynôme homogène $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$ tel que

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) = 0 \,. \tag{2.3}$$

D'après [11, Théorème 4.2], toute E-fonction f est solution d'un E-opérateur différentiel. De plus, le théorème 4.3 de [11] stipule qu'un tel opérateur n'a que deux singularités : 0 et ∞. Cela signifie que f est annulée par un opérateur différentiel de la forme

$$L := a_0(z) + a_1(z)\delta + \cdots + a_{m-1}(z)\delta^{m-1} + z^\nu \delta^{(m)} \,,$$

où les $a_i(z)$ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ et $\nu \geq 0$ est un entier. Ainsi, le système différentiel associé à la matrice compagnon A_L d'une telle équation est à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z, 1/z]$.

Pour tout i, $1 \leq i \leq r$, il existe donc une matrice $A_i(z) \in \mathcal{M}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}[z, 1/z])$ telle que

$$\begin{pmatrix} \delta(f_i) \\ \vdots \\ \delta^{m_i}(f_i) \end{pmatrix} = A_i(z) \begin{pmatrix} f_i \\ \vdots \\ \delta^{m_i - 1}(f_i) \end{pmatrix} ,$$

où m_i peut être choisi comme le minimum des ordres des E-opérateurs annulant f_i. Notons

$$A(z) := A_1(z) \oplus A_2(z) \oplus \cdots \oplus A_r(z)$$

la somme directe des matrices $A_i(z)$. Les fonctions $f_{i,j}(z) = \delta^j(f_i)$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq m_i - 1$, sont les coordonnées d'un vecteur solution du système différentiel associé à la matrice $A(z)$. Comme $A(z)$ est à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z, 1/z]$, tout point $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ est régulier pour ce système. D'après (2.3) et le théorème E2, il existe un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z, (X_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j < m_i}]$ homogène en les variables $X_{i,j}$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j < m_i$, tel que

$$Q(z, f_{i,j}(z)) = 0, \qquad \text{et} \qquad Q(\alpha, (X_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j < m_i}) = P(X_{1,0}, \dots, X_{r,0}) \,.$$

Ainsi, il suit que soit $Q \in \mathfrak{I}(f_1, \dots, f_r)$ et la relation (2.3) est banale, soit $Q \notin \mathfrak{I}(f_1, \dots, f_r)$ et (2.3) s'obtient alors par dégénérescence au point α d'une relation δ-algébrique homogène entre les fonctions $f_1, \dots, f_r$.

Passons au cas (M_q). Soient $f_1, \dots, f_r$ des M_q-fonctions et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions. On suppose qu'il existe $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$ homogène tel que

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) = 0 \,. \tag{2.4}$$

Choisissons un nombre réel R tel que $0 < |\alpha| < R < 1$. Comme les fonctions f_i n'ont qu'un nombre fini de pôles sur $D(0, R)$, il existe un polynôme $D(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tel que $g_i(z) := D(z) f_i(z)$ est analytique sur $D(0, R)$ pour tout i, $1 \leq i \leq r$, et $D(\alpha) = 1$. D'après (2.4), on a

$$P(g_1(\alpha), \dots, g_r(\alpha)) = 0 \,. \tag{2.5}$$

D'autre part, la proposition 2.5 assure que chaque fonction g_i est annulée par un σ_q-opérateur L_i, d'ordre noté m_i, qui est régulier au point α. En désignant par $A_i(z)$ la matrice compagnon de l'opérateur L_i, on obtient que les fonctions $g_i, \sigma_q(g_i) \ldots, \sigma_q^{m_i-1}(g_i)$ forment un vecteur solution d'un système q-mahlérien

$$\mathbf{Y}(z^q) = A_i(z)\mathbf{Y}(z), \quad A_i(z) \in \mathrm{GL}_{m_i}(\overline{\mathbb{Q}}(z)) .$$

pour lequel α est régulier. Notons

$$A(z) := A_1(z) \oplus A_2(z) \oplus \cdots \oplus A_r(z)$$

la somme directe des matrices $A_i(z)$. Les fonctions $\sigma_q^j(g_i)$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq m_i - 1$, sont les coordonnées d'un vecteur solution du système q-mahlérien associé à la matrice $A(z)$ et le point α est encore régulier pour ce système. D'après (2.5) et le théorème M2, il existe un polynôme $Q_0 \in \overline{\mathbb{Q}}[z, (X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j<m_i}]$ homogène en les variables $X_{i,j}$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j < m_i$, tel que

$$Q_0(z, \sigma_q^j(g_i)) = 0 \quad \text{ et } \quad Q_0(\alpha, (X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j<m_i}) = P(X_{1,0}, \ldots, X_{r,0}) .$$

Définissons $Q_1 \in \overline{\mathbb{Q}}[z, (X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j<m_i}]$ par

$$Q_1(z, (X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j<m_i}) := Q_0(z, (D(z^{q^j})X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j<m_i}) .$$

On a alors

$$Q_1(z, \sigma_q^j(f_i)(z)) = 0 \quad \text{et} \quad Q_1(\alpha, \sigma_q^j(f_i)(\alpha)) = P(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) ,$$

puisque $D(\alpha) = 1$. On a donc que soit $Q_1 \in \mathfrak{I}(f_1, \ldots, f_r)$ et la relation (2.4) est banale, soit $Q \notin \mathfrak{I}(f_1, \ldots, f_r)$ et (2.4) s'obtient alors par dégénérescence au point α d'une relation σ_q-algébrique homogène entre les fonctions $f_1, \ldots, f_r$. □

2.5. **Remarque sur les preuves des théorèmes E2 et M2.** Dans [17], Beukers prouve le théorème E2 de la façon suivante. D'une part, il montre que pour toute E-fonction f et tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$:

$$f(\alpha) = 0 \implies \begin{array}{c}\alpha \text{ est une singularité de} \\ \text{l'opérateur différentiel minimal annulant } f.\end{array} \tag{2.6}$$

D'autre part, en supposant par l'absurde que la conclusion du théorème E2 est fausse, il donne une construction élémentaire et générale d'une E-fonction qui contredit (2.6). Il ressort ainsi que le point clé pour démontrer le théorème E2 est d'obtenir l'implication (2.6). Celle-ci découle du fait que pour toute E-fonction f et tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, f est annulée par un opérateur différentiel régulier en α ; propriété elle-même garantie par l'existence d'un E-opérateur annulant f (cf. [11, Théorème 4.2]).

En adaptant l'argument de [17], on obtient que le théorème M2 découle du fait que pour toute M_q-fonction f et tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$:

$$f(\alpha) = 0 \implies \begin{array}{c}\alpha \text{ est une singularité du} \\ \sigma_q\text{-opérateur minimal annulant } f.\end{array} \tag{2.7}$$

Montrons que cette propriété est une conséquence de la proposition 2.3. Soit

$$a_0(z)f(z) + \cdots + a_n(z)f(z^{q^n}) = 0 , \tag{2.8}$$

l'équation minimale de f. Supposons par l'absurde que $f(\alpha) = 0$ et que α est régulier pour cette équation, c'est-à-dire que

$$a_0(\alpha^{q^\ell})a_n(\alpha^{q^\ell}) \neq 0\,, \qquad \forall \ell \geq 0. \tag{2.9}$$

Posons $g(z) := f(z)/(z-\alpha)$. D'après (2.8), g est annulée par le σ_q-opérateur

$$L_1 := a_0(z)(z-\alpha) + \cdots + a_n(z)(z^{q^n} - \alpha)\sigma_q^n = 0\,. \tag{2.10}$$

Soit R tel que $|\alpha| < R < 1$. Comme g est bien définie en α, il existe $P(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tel que $P(z)g(z)$ est analytique sur $D(0,R)$ et $P(\alpha) = 1$. D'après la proposition 2.3, $P(z)g(z)$ est annulée par un M_q-opérateur de niveau R. On en déduit l'existence d'un σ_q-opérateur

$$L_2 := b_0(z) + b_1(z)\sigma_q + \cdots + b_m(z)\sigma_q^m \tag{2.11}$$

qui annule g et tel que $b_0(\alpha) \neq 0$. Considérons un tel opérateur avec m minimal. Notons que $m \geq n$. Posons

$$L_3 := b_m(z)\sigma^{m-n}L_1 - a_n(z^{q^{m-n}})(z^{q^m} - \alpha)L_2\,.$$

On obtient que L_3 annule g et est d'ordre strictement inférieur à m. De plus, on vérifie que le terme constant de L_3 vaut

$$a_n(z^{q^{m-n}})(z^{q^m} - \alpha)b_0(z)$$

si $m > n$ et

$$a_n(z^{q^{m-n}})(z^{q^m} - \alpha)b_0(z) - b_m(z)a_0(z)(z-\alpha)$$

lorsque $m = n$. Dans les deux cas, (2.9) assure que ce terme ne s'annule pas en α. Cela contredit la minimalité de m et prouve donc (2.7).

Il faut prendre garde au fait que nous n'obtenons pas pour autant une preuve « sans transcendance » du théorème M2 à la façon de [12, 17]. En effet, la démonstration que nous avons donnée de la proposition 2.3 repose sur le théorème M2 et l'argument serait donc circulaire. Nous attirons simplement l'attention sur le fait que, *in fine*, le théorème M2 et la proposition 2.3 sont essentiellement équivalents, de même que le théorème E2 et le fait que pour toute E-fonction f et tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, f est annulée par un opérateur différentiel régulier en α. Dans le cas des E-fonctions, ce sont les résultats profonds obtenus sur les G-opérateurs qui permettent d'obtenir « miraculeusement » l'existence de tels opérateurs, via la notion de E-opérateur (cf. [11]). Dans le cas des M_q-fonctions, nous ne savons pour le moment pas comment obtenir l'existence de ces opérateurs indépendamment du théorème M2.

3. Détermination effective des relations algébriques

Dans cette section, nous discutons brièvement la question suivante, ainsi que son analogue pour les M_q-fonctions : étant donnés $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et des E-fonctions $f_1, \ldots, f_r$, peut-on déterminer les relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$? Il s'agit donc de déterminer explicitement une base de l'idéal

$$\mathfrak{I}(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) := \{P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_r] : P(f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)) = 0\}\,.$$

L'article [23] décrit un algorithme pour répondre à cette question dans le cas des E-fonctions. Nous décrivons une approche alternative fondée sur le théorème 1.1 qui, nous semble-t-il, est particulièrement limpide. L'utilisation du théorème 1.1 permet à nouveau de traiter les E- et les M_q-fonctions de façon unifiée. Notons que ces deux approches souffrent d'une même limite liée à l'utilisation de l'algorithme de Hrushovski-Feng [21] (ou de Feng [22] pour les M_q-fonctions).

Remarque 3.1. Comme dans [9], on supposera que chaque fonction f_i est donnée par un opérateur différentiel linéaire L_i qui l'annule et les premiers coefficients de son développement de Taylor à l'origine. On supposera que le nombre de coefficients connus est suffisamment grand pour que f_i soit uniquement déterminée par ces données.

Remarque 3.2. On prendra garde au fait que les idéaux $\mathfrak{I}(f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha))$, $\mathfrak{I}^\delta(f_1(z),\ldots,f_r(z))$ et $\mathfrak{I}^{\sigma_q}(f_1(z),\ldots,f_r(z))$ ne sont pas définis comme des idéaux homogènes. Néanmoins, l'algorithme décrit ci-dessous s'adapte facilement à l'étude des relations homogènes.

Étant donné un idéal $\mathfrak{I}$ de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1,\ldots,X_s]$, $s\geq 1$, on note $\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I})$ l'idéal de $\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\ldots,X_s]$ obtenu en évaluant les élément de $\mathfrak{I}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_1,\ldots,X_s]$ en $z=\alpha$.

Nous traitons d'abord le cas des E-fonctions.

1. La première étape consiste à déterminer pour chaque f_i un entier m_i tel que f_i est annulée par un E-opérateur d'ordre au plus m_i. On suit l'approche d'André [11]. Si $f(z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}z^n$, on dit que $g(z):=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ est la G-fonction associée à f. À partir de l'opérateur L_i, on peut déterminer un opérateur différentiel L_i' annulant la G-fonction associée à f_i en utilisant la transformée de Fourier-Laplace. À partir de ce premier opérateur on peut obtenir un opérateur différentiel d'ordre minimal annulant cette G-fonction (voir [18]). C'est un G-opérateur (voir, par exemple, [33]). À partir de ce G-opérateur, on détermine facilement un E-opérateur explicite annulant f_i (cf. [11, Sections 2 et 5]). On note m_i l'ordre de cet opérateur et on pose $\mathbf{m}:=(m_1-1,\ldots,m_r-1)$.
2. La démonstration du théorème 1.1, montre alors que
$$\mathfrak{I}(f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha))=\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r))\cap\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\ldots,X_r]\,,$$
où $\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r):=\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)\cap\overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r,0\leq j<m_i}]$ et où l'on a identifié les variables $X_{i,0}$ et X_i, $1\leq i\leq r$. Notons que, dans la démonstration du théorème 1.1 les relations considérées sont homogènes. On se ramène au cas inhomogène étudié ici en ajoutant la fonction constante égale à 1.
3. Supposons que l'on dispose d'un ensemble explicite de générateurs de $\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r)$. En les évaluant en $z=\alpha$, on obtient un ensemble explicite de générateurs de l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r))$. La détermination explicite d'une base de l'idéal
$$\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r))\cap\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\ldots,X_r]$$
s'obtient alors classiquement en utilisant la théorie des bases de Gröbner (voir [15, Section 6.2] pour l'algorithme correspondant).

Il ressort de cette analyse que la connaissance d'une base de $\mathfrak{I}^{\delta}_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r)$ suffit à déterminer une base de $\mathfrak{I}(f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha))$ [3]. La principale difficulté réside en fait dans l'obtention de cette première. Les fonctions $\delta^j(f_i)$, $1\le i\le r$, $1\le j< m_i$, étant liées par un système différentiel linéaire, l'algorithme de Hrushovski-Feng [21] permet en principe d'obtenir une base de $\mathfrak{I}^{\delta}_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r)$. Cependant, cet algorithme semble difficile à mettre en œuvre du point de vue pratique ; c'est là le talon d'Achille de cette méthode.

Dans le cas des M_q-fonctions, on peut suivre rigoureusement la même approche, en substituant l'algorithme de Feng [22] à celui de Hrushovski-Feng. Notons que cet algorithme est tout aussi peu commode à utiliser dans la pratique. La seule différence réside dans la première étape, à savoir la détermination explicite d'un vecteur $\mathbf{m} := (m_1-1,\ldots,m_r-1)$ tel que

$$\mathfrak{I}(f_1(\alpha),\ldots,f_r(\alpha)) = \mathrm{ev}_{\alpha}(\mathfrak{I}^{\sigma_q}_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r))\cap\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\ldots,X_r]\,,$$

où $\mathfrak{I}^{\sigma_q}_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r) := \mathfrak{I}^{\sigma_q}(f_1,\ldots,f_r)\cap\overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\le i\le r,0\le j<m_i}]$. Une analyse de la preuve du théorème 1.1 montre que s'il existe un entier $\ell\ge 1$ tel que pour chaque i, $1\le i\le r$, on dispose d'un système q^{ℓ}-malhérien linéaire régulier en α et possédant un vecteur solution formé de la fonction f_i et de fonctions de la forme $\sigma^{j}_{q^{\ell}}(f_i)$ pour $j\le c_i$, alors on peut choisir $m_i := \ell c_i+1$.

Voici comment construire explicitement de tels systèmes. Partant d'un σ_q-opérateur annulant f_i, on détermine un σ_q-opérateur d'ordre minimal annulant f_i (cf. [4]). Notons n_i son ordre. D'après le théorème 1.10 de [3], on peut itérer le système compagnon associé, puis utiliser la technique de dédoublement décrite dans la preuve du lemme 5.2 de [3], pour obtenir un système q^{ℓ}-mahlérien pour un certain ℓ explicite tel que α est régulier pour ce système. En outre, il suffit de choisir ℓ suffisamment grand par rapport à q, au module de α, et au maximum des degrés des polynômes de l'équation minimale de f_i [4]. On peut ainsi trouver explicitement un entier ℓ qui convient pour toutes les fonctions f_i. Il suffit alors de prendre $m_i := 2\ell+n_i$.

Remarque 3.3. Dans le cas (E), nous avons vu que le vecteur $\mathbf{m}$ peut être déterminé indépendamment de α. Dans le cas (M_q), on peut déterminer $\mathbf{m}$ qui convient pour tout $\alpha\in D^*(0,R)$ lorsque $R<1$ est préalablement fixé, mais il n'existe pas nécessairement un vecteur $\mathbf{m}$ qui convient pour tous les points du disque unité (cf. exemple 8.3).

4. Sporadicité des relations non banales

La proposition suivante établit que dans le cadre des E- et des M_q-fonctions les relations non banales sont nécessairement sporadiques.

Proposition 4.1. *On a les deux résultats suivants.*

---

3. Voir [19, Chapitre 26] pour une discussion sur la complexité du calcul d'une base de Gröbner.

4. Plus précisément, il suffit de choisir ℓ de sorte que $\alpha^{q^{\ell}}$ soit régulier pour l'équation minimale de f_i. Si $R<1$ est fixé, on choisit ℓ tel que $a(z^{q^{\ell}})$ n'a pas de racine dans $D^*(0,R)$, pour tout polynôme $a(z)$ qui est coefficient de l'équation minimale de f_i. Ce choix de ℓ conviendra alors pour tout $\alpha\in D^*(0,R)$.

(E) *Soient* $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ *des E-fonctions. Il existe un ensemble fini* $\mathcal{S} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que l'existence d'une relation non banale entre* $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ *implique que* $\alpha \in \mathcal{S}$.

(M_q) *Soient* $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ *des* M_q*-fonctions et* R *un nombre réel,* $0 < R < 1$. *Il existe un ensemble fini* $\mathcal{S}_R \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que l'existence d'une relation non banale entre* $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ *avec* $\alpha \in D^*(0, R)$ *implique que* $\alpha \in \mathcal{S}_R$.

Remarque 4.2. En général, les relations non banales entres des fonctions analytiques n'ont aucune raison d'être sporadiques, comme le montre l'exemple suivant. Considérons la fonction définie par

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_k \left(\prod_{i=1}^{k} P_i(z) \right) ,$$

où $P_1, P_2, \ldots$ est une énumération des polynômes à coefficients entiers et $(c_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante de nombres rationnels non nuls tendant vers 0. Si la décroissance de c_k est suffisamment rapide, alors f est une fonction entière, ce que nous supposerons désormais. Ainsi, comme f n'est pas un polynôme, elle est donc transcendante et les fonctions 1 et f sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Par construction, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, on a $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, de sorte que la relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ donnée par $f(\alpha) \times 1 - 1 \times f(\alpha) = 0$ est non banale relativement à $\{1, f(z)\}$.

Démontrons d'abord le lemme suivant. Nous conservons les notations introduites dans la section 3.

Lemme 4.3. *Soient* m, r *deux entiers positifs avec* $m \geq r$. *Soit* $\mathfrak{I}$ *un idéal de* $\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1, \ldots, X_m]$ *et posons* $\mathfrak{I}_r := \mathfrak{I} \cap \overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1, \ldots, X_r]$. *Alors, il existe un ensemble fini* $\mathcal{S} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *tel que, pour tout* α *dans* $\overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathcal{S}$, *on a*

$$\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}) \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_r] = \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r) .$$

Démonstration. L'argument repose sur l'utilisation de bases de Gröbner. Nous renvoyons à [15] pour les résultats classiques concernant cette notion.

On considère une base de Gröbner $\mathcal{G} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ relativement à un ordre monomial $\succ$ qui élimine $X_{r+1}, \ldots, X_m$. On peut supposer sans perte de généralité que $P_1, \ldots, P_s \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \ldots, X_m]$. Pour un tel ordre, tout monôme contenant une des variables $X_{r+1}, \ldots, X_m$ est plus grand qu'un monôme composé uniquement des variables $X_1, \ldots, X_r$. De plus, l'ordre est compatible avec la multiplication. Pour un polynôme P, on note $\mathrm{lm}(P)$ le monôme le plus grand pour la relation d'ordre totale $\succ$ et $\mathrm{lc}(P) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le coefficient correspondant. On a

$$P = \mathrm{lc}(P)\mathrm{lm}(P) + P'$$

où P' est un polynôme dont les monômes sont tous plus petits que $\mathrm{lm}(P)$. Soit $\mathcal{S} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des racines des polynômes $\mathrm{lc}(P_i)$, $1 \leq i \leq s$. On va montrer que si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathcal{S}$, alors

$$\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}) \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_r] = \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r) .$$

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Considérons $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathcal{S}$ tel qu'il existe $P \in \mathfrak{I} \cap \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_m]$ pour lequel

$$\mathrm{ev}_\alpha(P) \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r] \setminus \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r)\,.$$

On choisit P de sorte que $\mathrm{lm}(P)$ soit minimal parmi les polynômes ayant cette propriété. Comme $\mathcal{G}$ est une base de Gröbner, il existe un P_i dont le monôme dominant divise celui de P. De plus, comme $\alpha \notin \mathcal{S}$, on a $\mathrm{ev}_\alpha(\mathrm{lc}(P_i)) \neq 0$. On pose

$$Q := \left(\mathrm{lc}(P_i)P - \frac{\mathrm{lc}(P)\mathrm{lm}(P)}{\mathrm{lm}(P_i)}P_i\right)/\mathrm{ev}_\alpha(\mathrm{lc}(P_i)) \in \overline{\mathbb{Q}}[z, X_1, \dots, X_m]\,.$$

Comme $P \notin \mathfrak{I}_r$, $\mathrm{lm}(P)$ contient au moins une des variables $X_{r+1}, \dots, X_m$. Comme $\mathrm{ev}_\alpha(P) \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$, le coefficient dominant de P doit s'annuler en α. On obtient donc que $\mathrm{ev}_\alpha(Q) = \mathrm{ev}_\alpha(P)$. Comme le monôme dominant de Q est strictement plus petit que celui de P, on obtient par minimalité que $\mathrm{ev}_\alpha(Q) \in \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r)$. Ainsi, $\mathrm{ev}_\alpha(P) = \mathrm{ev}_\alpha(Q) \in \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r)$, ce qui contredit la définition de P. □

Démonstration de la Proposition 4.1. Commençons par le cas (E). Soit $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r$ tel que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, on a

$$\mathfrak{I}(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) = \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1, \dots, f_r)) \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]\,.$$

Nous avons vu qu'un tel $\mathbf{m}$ existe (cf. Section 3). Posons $\mathfrak{I} := \mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1, \dots, f_r)$ et $\mathfrak{I}_r := \mathfrak{I} \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]$. S'il existe une relation non banale entre les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)$, alors il existe un polynôme Q tel que

$$\mathrm{ev}_\alpha(Q) \in \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}) \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r] \setminus \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r)$$

et donc

$$\mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}) \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r] \neq \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}_r)\,.$$

D'après le lemme 4.3, il n'existe qu'un nombre fini de tels α.

Le cas (M_q) est similaire. On choisit $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r$ tel que

$$\mathfrak{I}(f_1(\alpha), \dots, f_r(\alpha)) = \mathrm{ev}_\alpha(\mathfrak{I}^{\sigma_q}_{\mathbf{m}}(f_1, \dots, f_r)) \cap \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_r]\,.$$

La différence est que l'existence d'un tel $\mathbf{m}$ est seulement assurée pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^* \cap D(0, R)$ lorsque $R < 1$ est fixé, mais qu'il n'est pas toujours possible de choisir $\mathbf{m}$ indépendamment de R (cf. remarque 3.3). □

5. Structure des idéaux des relations δ- et σ_q-algébriques

Dans cette section, nous décrivons la structure des idéaux $\mathfrak{I}^\delta(f_1, \dots, f_r)$ et $\mathfrak{I}^{\sigma_q}(f_1, \dots, f_r)$ qui interviennent dans le théorème 1.1.

5.1. Le cas des E-fonctions.

Soient $f_1, \dots, f_r$ des E-fonctions. Pour tout i, $1 \leq i \leq r$, notons

$$a_{i,0}(z) + \cdots + a_{i,m_{i-1}}(z)\delta^{m_i - 1} + \delta^{m_i}$$

l'opérateur différentiel d'ordre minimal annulant f_i, où $a_{i,j}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ pour tout j, $1 \leq j \leq m_i - 1$. En posant

$$L_i := a_{i,0}(z)X_{i,0} + \cdots + a_{i,m_{i-1}}(z)X_{i,m_{i-1}} + X_{i,m_i}\,,$$

on a donc $L_i \in \mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$. Posons $\mathbf{m} := (m_1-1,\ldots,m_r-1)$ et

$$\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r) := \mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r) \cap \overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j< m_i}]\,.$$

Rappelons que si R est un anneau muni d'une dérivation ∂, un ∂-idéal $\mathcal{I}$ de R est un idéal de R tel que $\partial(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. Le ∂-idéal engendré par un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de R est le plus petit ∂-idéal de R contenant $\mathcal{S}$. L'anneau $\overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r, j\in\mathbb{N}}]$ peut être muni de la dérivation δ qui agit classiquement sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et telle que $\delta(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$. Muni de cette dérivation, on vérifie que $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ est un δ-idéal. L'anneau de polynômes $\overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r, j\in\mathbb{N}}]$ n'est pas noethérien et l'idéal $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ n'est pas finiment engendré, puisqu'il est non trivial ; il l'est toutefois en tant que δ-idéal. Le résultat suivant précise un ensemble de générateurs.

Proposition 5.1. *En tant que δ-idéal, $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ est engendré par les éléments de $\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r)$ et les formes linéaires $L_1,\ldots,L_r$.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{J}$ le δ-idéal engendré par les éléments de l'idéal $\mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r)$ et les formes linéaires $L_1,\ldots,L_r$. Il est clair que

$$\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)\,.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $Q \in \mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$. Considérons l'ordre partiel sur $\mathbb{N}^r$ défini par $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ si $m_i \leq n_i$ pour tout i, $1\leq i\leq r$. La *multi-profondeur* de Q est définie comme le r-uplet minimal $(n_1,\ldots,n_r)$ tel que le support de Q est inclus dans $\{(i,j) : 1\leq i\leq r, 0\leq j\leq n_i\}$.

Nous allons raisonner par récurrence multiple sur $(n_1,\ldots,n_r)$. Si $n_i < m_i$ pour tout i, alors $Q \in \mathfrak{I}^\delta_{\mathbf{m}}(f_1,\ldots,f_r)$ et il n'y a rien à prouver. Supposons à présent que tout polynôme de $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ de multi-profondeur au plus $(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ appartient à $\mathfrak{J}$ et montrons qu'il en est de même pour tout polynôme de $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ de multi-profondeur au plus $(n_1+1,n_2,\ldots,n_r)$, où $n_1+1\geq m_1$. L'argument pour les polynômes de $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ de multi-profondeur au plus $(n_1,\ldots,n_j+1,\ldots,n_r)$ est identique.

On note $\boldsymbol{X}^\circ$ l'ensemble des variables $X_{i,j}$, $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq n_i$. Soit Q un élément de $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ de multi-profondeur au plus $(n_1+1,n_2,\ldots,n_r)$. On peut écrire

$$Q =: \sum_{\nu=0}^{s} M_\nu(z,\boldsymbol{X}^\circ) X_{1,n_1+1}^{\nu}\,,$$

où les $M_\nu(z,\boldsymbol{X}^\circ)$ appartiennent à $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\boldsymbol{X}^\circ]$ et $s\geq 0$. On raisonne par récurrence sur l'entier s pour montrer que $Q\in\mathfrak{J}$. Si $s=0$, alors Q est de multi-profondeur au plus $(n_1,n_2,\ldots,n_r)$ est la première hypothèse de récurrence implique donc que $Q\in\mathfrak{J}$. Supposons à présent que $s\geq 1$ et que le résultat est connu pour tout élément de $\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ de multi-profondeur au plus $(n_1+1,n_2,\ldots,n_r)$ et de degré au plus $s-1$ en X_{1,n_1+1}. Posons

$$P := M_s(z,\boldsymbol{X}^\circ) X_{1,n_1+1}^{s-1} \delta^{n_1+1-m_1}(L_1)\,.$$

Comme $L_1 \in \mathfrak{J}$ et que $\mathfrak{J}$ est un δ-idéal, on a $P\in\mathfrak{J}\subset\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$. De plus, comme le coefficient de X_{1,n_1+1} dans $\delta^{n_1+1-m_1}(L_1)$ est égal à 1, le coefficient de X_{1,n_1+1}^s dans P est égal à $M_s(z,\boldsymbol{X}^\circ)$. On obtient que $Q-P\in\mathfrak{I}^\delta(f_1,\ldots,f_r)$ est un polynôme de multi-profondeur au plus $(n_1+1,n_2,\ldots,n_r)$ et de degré au plus $s-1$ en la variable X_{1,n_1+1}. Par hypothèse de récurrence, on a $Q - P \in \mathfrak{J}$. Comme $P \in \mathfrak{J}$, on en déduit que $Q \in \mathfrak{J}$ comme souhaité. □

5.2. **Le cas des M_q-fonctions.** Soient $f_1, \ldots, f_r$ des M_q-fonctions. Pour tout i, $1 \leq i \leq r$, notons

$$a_{i,0}(z) + \cdots + a_{i,m_i-1}(z)\sigma_q^{m_i-1} + \sigma_q^{m_i}$$

le σ_q-opérateur d'ordre minimal annulant f_i, où $a_{i,j}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ pour tout j, $1 \leq j \leq m_i - 1$. En posant

$$L_i := a_{i,0}(z)X_{i,0} + \cdots + a_{i,m_{i-1}}(z)X_{i,m_{i-1}} + X_{i,m_i}\,,$$

on a donc $L_i \in \mathfrak{J}^{\sigma_q}(f_1, \ldots, f_r)$. Posons $\mathbf{m} := (m_1 - 1, \ldots, m_r - 1)$ et

$$\mathfrak{J}^{\sigma_q}_{\mathbf{m}}(f_1, \ldots, f_r) := \mathfrak{J}^{\sigma_q}(f_1, \ldots, f_r) \cap \overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r, 0\leq j<m_i}]\,.$$

Rappelons que si R est un anneau muni d'un endomorphisme ϕ, un ϕ-idéal $\mathcal{I}$ de R est un idéal de R tel que $\phi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$. Le ϕ-idéal engendré par un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de R est par définition le plus petit ϕ-idéal de R contenant $\mathcal{S}$. L'anneau $\overline{\mathbb{Q}}(z)[(X_{i,j})_{1\leq i\leq r, j\in\mathbb{N}}]$ peut être muni de l'endomorphisme σ_q qui agit comme précédemment sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et tel que $\sigma_q(X_{i,j}) = X_{i,j+1}$. Cette définition implique que $\mathfrak{J}^{\sigma_q}(f_1, \ldots, f_r)$ est un σ_q-idéal. À nouveau, $\mathfrak{J}^{\sigma_q}(f_1, \ldots, f_r)$ est finiment engendré en tant que σ_q-idéal et on obtient l'analogue de la proposition 5.1, dont la preuve est par ailleurs identique.

Proposition 5.2. *En tant que σ_q-idéal, $\mathfrak{J}^{\sigma_q}(f_1, \ldots, f_r)$ est engendré par les éléments de $\mathfrak{J}^{\sigma_q}_{\mathbf{m}}(f_1, \ldots, f_r)$ et les formes linéaires $L_1, \ldots, L_r$.*

6. Descente

Dans cette section, nous montrons comment le corollaire 1.3 découle du théorème 1.1, puis nous donnons deux conséquences de ce résultat.

Rappelons tout d'abord le lemme suivant, qui correspond au lemme 5.3 de [3]. L'énoncé donné ici est légèrement modifié, mais la preuve reste identique.

Lemme 6.1. *Soient $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres, $h_1(z), \ldots, h_r(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Supposons qu'il existe $w_1(z), \ldots, w_r(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tels que*

$$w_1(z)h_1(z) + \ldots + w_r(z)h_r(z) = 0\,, \tag{6.1}$$

avec $w_i(\alpha) = 0$ pour tout indice i dans un ensemble $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, r\}$ et $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$ pour un certain indice $i_0 \in \{1, \ldots, r\} \setminus \mathcal{I}$. Alors, il existe $w'_1(z), \ldots, w'_r(z) \in \mathbb{K}[z]$, tels que

$$w'_1(z)h_1(z) + \ldots + w'_r(z)h_r(z) = 0\,,$$

avec $w'_i(\alpha) = 0$ pour tout indice $i \in \mathcal{I}$ et $w'_{i_0}(\alpha) \neq 0$.

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

Lemme 6.2. *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ deux corps de nombre et $f(z)$ une E-fonction (resp. une M_q-fonction) à coefficients dans $\mathbb{L}$. Soit $w_1, \ldots, w_d \in \mathbb{L}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. Considérons l'unique décomposition*

$$f(z) = w_1 f_1(z) + \cdots + w_d f_d(z)$$

telle que $f_1(z), \ldots, f_d(z) \in \mathbb{K}[[z]]$. Alors les fonctions $f_1(z), \ldots, f_d(z)$ sont des E-fonctions (resp. des M_q-fonctions).

Remarque 6.3. Dans le cas (M_q), un raisonnement similaire à celui suivi à la fin de la preuve du corollaire 1.3 ci-après montre que, si $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$, n'est pas un pôle de $f(z)$, alors les fonctions $f_1(z), \ldots, f_d(z)$ n'ont pas non plus de pôle en α.

Démonstration. Nous traiterons uniquement le case des E-fonctions, celui des M_q-fonctions étant strictement identique. Soit $\mathbb{L}_0$ la clôture galoisienne de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. Soit φ un élément primitif de $\mathbb{L}_0$ sur $\mathbb{K}$ dont nous noterons t le degré. Comme l'extension $\mathbb{L}_0$ est galoisienne le cardinal de $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}_0/\mathbb{K})$ est égal à t. Il existe donc une unique décomposition

$$f(z) = \sum_{i=0}^{t-1} \varphi^i g_i(z)\,, \tag{6.2}$$

telle que $g_i(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ pour tout i. Les fonctions $f_1(z), \ldots, f_d(z)$ étant des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{L}_0$ des fonctions $g_0(z), \ldots, g_{t-1}(z)$, il suffit de montrer que les $g_i(z)$ sont des E-fonctions. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_t$ les éléments de $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}_0/\mathbb{K})$. Étant donnés une série entière $h(z) = \sum_n a_n z^n$ à coefficients dans $\mathbb{L}_0$ et $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}_0/\mathbb{K})$, on note $h^\tau(z) := \sum_n \tau(a_n) z^n$. Comme $g_j^{\tau_i}(z) = g_j(z)$ pour tout i, j, on déduit de (6.2) la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} f^{\tau_1}(z) \\ \vdots \\ f^{\tau_t}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1(\varphi)^0 & \cdots & \tau_1(\varphi)^{t-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_t(\varphi)^0 & \cdots & \tau_t(\varphi)^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0(z) \\ \vdots \\ g_{t-1}(z) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Comme $\mathbb{L}_0 = \mathbb{K}(\varphi)$, les nombres $\tau_1(\varphi), \ldots, \tau_t(\varphi)$ sont distincts et la matrice de Vandermonde $(\tau_i(\varphi)^j)_{1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq t-1}$ est donc inversible. En inversant cette matrice dans l'égalité (6.3), on obtient les fonctions $g_0(z), \ldots, g_{t-1}(z)$ comme combinaisons linéaires sur $\mathbb{L}_0$ des fonctions $f^{\tau_1}(z), \ldots, f^{\tau_t}(z)$. Comme $f(z)$ est une E-fonction, il suit que les fonctions $f^{\tau_1}(z), \ldots, f^{\tau_t}(z)$ sont des E-fonctions. On en déduit que les fonctions $g_0(z), \ldots, g_{t-1}(z)$ sont des E-fonctions. $\square$

Démonstration du corollaire 1.3. Nous démontrons dans un premier temps le cas (E). Soit $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps. Supposons que les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r \in \mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Quitte à choisir un sous-corps de $\mathbb{K}$, on peut sans perte de généralité supposer que $\mathbb{K}$ est un corps de nombres (puisque les coefficients d'une E-fonction engendrent toujours une extension finie de $\mathbb{Q}$). Il existe donc des E-fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ telles que $\xi_1 = f_1(1), \ldots, \xi_r = f_r(1)$. D'après le théorème 1.1, il existe une relation δ-linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ qui se spécialise en $z = 1$ en une relation non triviale entre les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$. Notons que les dérivées successives des f_i restent à coefficients dans $\mathbb{K}$. D'après le lemme 6.1, il existe donc une relation δ-linéaire sur $\mathbb{K}(z)$ entre les fonctions $f_1(z), \ldots, f_r(z)$ qui se spécialise au point 1 en une relation non triviale entre les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$. La relation obtenue est nécessairement à coefficients dans $\mathbb{K}$ et on obtient donc que les nombres $\xi_1, \ldots, \xi_r$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{K}$.

En d'autres termes, les extensions $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ sont linéairement disjointes sur $\mathbb{K}$. Il découle alors de [20, Chapter V, §2] et [27, Chapter VIII, §3] que l'homomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbres φ de $\mathbf{E}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbf{E}$ défini par $\varphi(\xi \otimes \beta) =$

$\xi\beta$ est injectif et que son image correspond aux combinaisons linéaires à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ des éléments de $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$.

Il reste à montrer que φ est surjectif, c'est-à-dire que tout élément de $\mathbf{E}$ peut s'écrire comme une telle combinaison linéaire. Soit $\xi \in \mathbf{E}$. Il existe une E-fonction $f(z)$ telle que $f(1) = \xi$. Soit $\mathbb{L}$ un corps de nombres tel que $f(z) \in \mathbb{L}[[z]]$ et $w_1, \ldots, w_d \in \mathbb{L}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. Il existe donc une décomposition

$$f(z) = w_1 f_1(z) + \cdots + w_d f_d(z)\,,$$

telle que $f_1(z), \ldots, f_d(z) \in \mathbb{K}[[z]]$. D'après le lemme 6.2, ce sont sont des E-fonctions, de sorte que $f_i(1) \in \mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ pour tout i, $1 \leq i \leq d$. Comme

$$\xi = w_1 f_1(1) + \cdots + w_d f_d(1)\,,$$

on obtient bien le résultat souhaité.

Dans le cas (M_q), on montre *mutatis mutandis* que les extensions $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ sont linéairement disjointes sur $\mathbb{K}$ et donc que l'homomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbres φ de $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbf{M}_{q,\alpha}$ défini par $\varphi(\xi \otimes \beta) = \xi\beta$ est injectif et que son image correspond aux combinaisons linéaires à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ des éléments de $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$. Là encore, il reste à montrer qu'il est surjectif. Soit $\xi \in \mathbf{M}_{q,\alpha}$. Il existe une M_q-fonction $f(z)$ telle que $f(\alpha) = \xi$. Soit $\mathbb{L}$ un corps de nombres tel que $f(z) \in \mathbb{L}[[z]]$ et $w_1, \ldots, w_d \in \mathbb{L}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. Il existe donc une décomposition

$$f(z) = w_1 f_1(z) + \cdots + w_d f_d(z)\,, \tag{6.4}$$

telle que $f_1(z), \ldots, f_d(z) \in \mathbb{K}[[z]]$. D'après le lemme 6.2, ce sont sont des M_q-fonctions. Pour conclure, on doit s'assurer que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_d(z)$ n'ont pas de pôle au point α. Supposons par l'absurde que ce soit le cas et notons $n \geq 1$ le plus petit entier tel que les fonctions $g_i(z) = (z-\alpha)^n f_i(z)$, $1 \leq i \leq d$, sont toutes bien définies en α. Par minimalité, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$ tel que

$$g_{i_0}(\alpha) \neq 0\,. \tag{6.5}$$

Par ailleurs, on a

$$(z-\alpha)^n f(z) = w_1 g_1(z) + \cdots + w_d g_d(z)$$

et comme $f(z)$ n'a pas de pôle en α, il suit que

$$w_1 g_1(\alpha) + \cdots + w_d g_d(\alpha) = 0\,.$$

Comme $\alpha \in \mathbb{K}$, les nombres $g_1(\alpha), \ldots, g_d(\alpha)$ appartiennent à $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$. Comme les extensions $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ sont linéairement disjointes sur $\mathbb{K}$ et comme les nombres $w_1, \ldots, w_d \in \overline{\mathbb{Q}}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$, ces nombres restent linéairement indépendants sur $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$. On en déduit que $g_1(\alpha) = \cdots = g_d(\alpha) = 0$, ce qui contredit (6.5). Ainsi, les fonctions $f_1(z), \ldots, f_d(z)$ sont toutes bien définies en α et (6.4) implique que

$$\xi = f(\alpha) = w_1 f_1(\alpha) + \cdots + w_d f_d(\alpha) \in \varphi(\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{Q}})\,,$$

comme souhaité. □

Les deux résultats suivants découlent également du corrolaire 1.3. Dans le cas (E), ils correspondent respectivement au Corollary 3 et au Lemma 1 de [24]. Dans le cas (M_q), le corollaire 6.6 correspond au corollaire 1.8 de [3].

Corollaire 6.4. *On a les deux résultats suivants.*

(E) *Soient* $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *un corps de nombres et* $w_1, \ldots, w_d$ *une base du* $\mathbb{Q}$-*espace vectoriel* $\mathbb{K}$. *Alors, on a*
$$\mathbf{E}_{\mathbb{K}} = w_1\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \oplus \cdots \oplus w_d\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} .$$

(M_q) *Soient* $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *un corps de nombres,* $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$, *et* $w_1, \ldots, w_d$ *une base du* $\mathbb{Q}(\alpha)$-*espace vectoriel* $\mathbb{K}$. *Alors, on a*
$$\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} = w_1\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{Q}} \oplus \cdots \oplus w_d\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{Q}} .$$

On démontre tout d'abord le lemme suivant, qui a son propre intérêt.

Lemme 6.5. *Soient* $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ *un corps de nombres et* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$. *On a*
$$\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}(\alpha)} = \mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} .$$

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}(\alpha)}$. Il existe alors une M_q-fonction $f(z) \in \mathbb{K}(\alpha)[[z]]$ telle que $\xi = f(\alpha)$. Notons d_0 le degré de α sur $\mathbb{K}$ et considérons la décomposition
$$f(z) = \sum_{i=0}^{d_0-1} \alpha^i f_i(z) , \tag{6.6}$$
telle que $f_0(z), \ldots, f_{d_0-1}(z) \in \mathbb{K}[[z]]$. D'après le lemme 6.2, les fonctions $f_i(z)$, $0 \le i \le d_0 - 1$ sont des M_q-fonctions. Notons toutefois qu'elles pourraient avoir un pôle au point α[5]. La fonction $g(z) = \sum_{i=0}^{d_0-1} z^i f_i(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ est également une M_q-fonction. Comme f est bien définie en α, (6.6) implique qu'il en est de même pour g. On a donc
$$\xi = f(\alpha) = g(\alpha) \in \mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} ,$$
comme souhaité. □

Démonstration du corollaire 6.4. Nous démontrons tout d'abord le cas (E). D'après le corollaire 1.3, $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ sont des extensions de $\mathbb{Q}$ linéairement disjointes. C'est donc en particulier le cas de $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{K}$. On en déduit que la somme
$$w_1\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} + \cdots + w_d\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}$$
est directe. En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 1.3, on obtient que tout élément ξ de $\mathbf{E}_{\mathbb{K}}$ admet une décomposition de la forme
$$\xi = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_t\xi_t ,$$
où $\beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{K}$ et $\xi_1, \ldots, \xi_t \in \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}$. On a par ailleurs la décomposition
$$\beta_i = \sum_{j=1}^{d} \lambda_{i,j} w_i ,$$
avec $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Q}$. Posons alors $\theta_j := \sum_i \lambda_{i,j}\xi_i \in \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}$, $1 \le i \le d$, de sorte que
$$\xi = w_1\theta_1 + \cdots + w_d\theta_d .$$
Ceci prouve l'inclusion
$$\mathbf{E}_{\mathbb{K}} \subset w_1\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \oplus \cdots \oplus w_d\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} .$$

---

5. On ne peut pas utiliser la remarque 6.3 car $\alpha \notin \mathbb{K}$.

L'inclusion inverse est immédiate.

En raisonnant de la même façon dans le cas (M_q), on obtient l'égalité

$$\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}} = w_1\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{Q}(\alpha)} \oplus \cdots \oplus w_d\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{Q}(\alpha)}\,.$$

On conclut en utilisant l'égalité $\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{Q}(\alpha)} = \mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{Q}}$, laquelle découle du lemme 6.5. □

Corollaire 6.6. *Soit $\mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres. On a les deux résultats suivants.*

(E) *Si $f(z)$ est une E-fonction à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors on a l'alternative suivante : soit $f(\alpha) \in \mathbb{K}$, soit $f(\alpha)$ est transcendant.*

(M_q) *Si $f(z)$ est une M_q-fonction à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$, n'est pas un pôle de $f(z)$, alors on a l'alternative suivante : soit $f(\alpha) \in \mathbb{K}$, soit $f(\alpha)$ est transcendant.*

Démonstration. Nous démontrons tout d'abord le cas (E). Posons $f_1(z) := f(\alpha z) \in \mathbb{K}[[z]]$ et $f_2(z) := 1$. D'après le corollaire 1.3, les nombres $f_1(1) = f(\alpha) \in \mathbf{E}_\mathbb{K}$ et $f_2(1) = 1 \in \mathbf{E}_\mathbb{K}$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si, et seulement si, ils le sont sur $\mathbb{K}$. Ceci équivaut à dire que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ si, et seulement si, $f(\alpha) \in \mathbb{K}$, comme souhaité.

Montrons à présent le cas (M_q). Posons $f_1(z) := f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ et $f_2(z) := 1$. D'après le corollaire 1.3, les nombres $f_1(\alpha) = f(\alpha) \in \mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ et $f_2(\alpha) = 1 \in \mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si, et seulement si, ils le sont sur $\mathbb{K}$. Ceci équivaut à dire que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ si, et seulement si, $f(\alpha) \in \mathbb{K}$, comme souhaité. □

7. Quelques remarques liées à un article de Fischler et Rivoal

Dans la section 6, nous avons déduit du théorème 1.1 plusieurs énoncés également obtenus par Fischler et Rivoal pour les E-fonctions (à savoir les Theorem 2, Theorem 3 et le Corrolary 3 de [24]), ainsi que leurs analogues dans le cadre des M_q-fonctions. Ces résultats ont été obtenus indépendamment de [24], contrairement aux résultats présentés dans cette section qui ont été inspirés par la lecture de [24].

7.1. **Considérations galoisiennes.** Nous démontrons d'abord, pour les M_q-fonctions, des résultats analogues aux propositions 1 et 4 de [24].

Étant donnés une série formelle $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ et un élément τ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on pose $f^\tau(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \tau(a_n) z^n$. On vérifie aisément que si f est une M_q-fonction, il en est de même de f^τ. Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 1.1.

Proposition 7.1. *Soient f une M_q-fonction et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $|\alpha| < 1$, tel que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que $|\tau(\alpha)| < 1$, on a $f^\tau(\tau(\alpha)) = \tau(f(\alpha))$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que si $p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ on a $p^\tau(\tau(\alpha)) = \tau(p(\alpha))$ et que le résultat est évident si $\alpha = 0$. On suppose désormais que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. Comme $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$, les nombres 1 et $f(\alpha)$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. D'après le théorème 1.1, une telle relation est la spécialisation en $z = \alpha$ d'une relation σ_q-linéaire (éventuellement dégénérée) entre les fonctions 1 et $f(z)$. Cela signifie qu'il existe un entier m et des polynômes $p_{-1}(z),\dots,p_m(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[z]$ tels que

$$p_{-1}(z)+p_0(z)f+p_1(z)\sigma_q(f)+\cdots+p_m(z)\sigma_q^m(f)=0 \tag{7.1}$$

et

$$p_{-1}(\alpha)=f(\alpha),\ p_0(\alpha)=-1,\ p_1(\alpha)=\cdots=p_m(\alpha)=0\,. \tag{7.2}$$

Comme τ et σ_q commutent, en appliquant τ à (7.1), on obtient

$$p_{-1}^\tau(z)+p_0^\tau(z)f^\tau+p_1^\tau(z)\sigma_q(f^\tau)+\cdots+p_m^\tau(z)\sigma_q^m(f^\tau)=0\,. \tag{7.3}$$

En spécialisant au point $\tau(\alpha)$ et en utilisant (7.2), on obtient $f^\tau(\tau(\alpha))=\tau(f(\alpha))$, comme souhaité. □

Corollaire 7.2. *Soient $f(z)$ une M_q-fonction à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$ et $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$, $|\alpha|<1$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *$f(\alpha)=0$,*
(ii) *il existe $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que $|\tau(\alpha)|<1$ et $f^\tau(\tau(\alpha))=0$,*
(iii) *pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que $|\tau(\alpha)|<1$, on a $f^\tau(\tau(\alpha))=0$,*
(iv) *Soit D le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$. La M_q-fonction $g(z):=f(z)/D(z)\in\mathbb{K}[[z]]$ est bien définie en $\tau(\alpha)$ pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{K})$ tel que $|\tau(\alpha)|<1$.*

Démonstration. Les implications (iii) ⇒ (i) ⇒ (ii) sont immédiates. D'après la proposition 7.1, (ii) implique que $\tau(f(\alpha))=0$ et donc $f(\alpha)=0$. On a donc (ii) implique (i). Soit $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ tel que $|\tau(\alpha)|<1$. En combinant, la proposition 7.1 et (i) on obtient que

$$f^\tau(\tau(\alpha))=\tau(f(\alpha))=\tau(0)=0\,.$$

Ainsi, (i) ⇒ (iii). Comme (iv) implique trivialement (i), il suffit par exemple de montrer que (iii) implique (iv). Or, d'après (iii), pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{K})$, tel que $|\tau(\alpha)|<1$, on a $f^\tau(\tau(\alpha))=0$. Comme $f^\tau=f$, on en déduit que f s'annule en $\tau(\alpha)$ et donc que la propriété (iv) est vérifiée. □

Similairement à [24, Section 6], on définit une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\alpha))$ sur $\mathbf{M}_{q,\alpha}$ de la façon suivante : étant donnés $\xi\in\mathbf{M}_{q,\alpha}$ et $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\alpha))$ on pose $\tau(\xi)=f^\tau(\alpha)$ où f désigne une M_q-fonction telle que $f(\alpha)=\xi$. Pour montrer que cette action est bien définie, il suffit de vérifier que $\tau(\xi)$ ne dépend pas du choix de f. Soit g une M_q-fonction telle que $g(\alpha)=\xi$ et $h:=f-g$. On a $h(\alpha)=0$. Il découle de la proposition 7.1 que $h^\tau(\tau(\alpha))=h^\tau(\alpha)=0$. Comme $h^\tau=f^\tau-g^\tau$, on a $f^\tau(\alpha)=g^\tau(\alpha)$, comme souhaité.

Le résultat suivant est l'analogue de [24, Proposition 4].

Proposition 7.3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombre, $\alpha\in\mathbb{K}$ et $\xi\in\mathbf{M}_{q,\alpha}$. Alors, $\xi\in\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ si et seulement si $\tau(\xi)=\xi$ pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $\xi\in\mathbf{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$ et $f\in\mathbb{K}[[z]]$ une M_q-fonction telle que $\xi=f(\alpha)$. Alors $\tau(\xi)=f^\tau(\alpha)=f(\alpha)=\xi$ pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{K})$.

Supposons à présent que ξ est fixé par tous les éléments de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{K})$. Soit f une M_q-fonction telle que $f(\alpha)=\xi$. Soit $\mathbb{L}$ la clôture galoisienne du corps engendré sur $\mathbb{K}$ par les coefficients de f. C'est en particulier une extension finie de $\mathbb{K}$. En définissant g comme la moyenne des $f^\tau(z)$ quand τ parcourt

$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$, on obtient que $g(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ et $g(\alpha) = \xi$, puisque $\tau(\xi) = \xi$ pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Ainsi, $\xi \in \mathrm{M}_{q,\alpha,\mathbb{K}}$. □

7.2. **Décomposition des M_q-fonctions sur un corps de nombres.** Soit R, $0 < R \leq 1$, un nombre réel. Une M_q-fonction f est dite *purement transcendante* sur $D(0, R)$ si f prend des valeurs transcendantes en tout point algébrique α du disque épointé $D^*(0, R)$ qui n'est pas un pôle de f.

Le résultat suivant est l'analogue de [24, Proposition 3].

Proposition 7.4. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombre, $f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ une M_q-fonction et R, $0 < R < 1$, un nombre réel. Alors, il existe des fractions rationnelles $R_1(z), R_2(z) \in \mathbb{K}(z)$ et une M_q-fonction $g(z) \in \mathbb{K}[[z]]$, analytique et purement transcendante sur $D(0, R)$, tels que*

$$f(z) = R_1(z) + R_2(z)g(z)\,.$$

Remarque 7.5. Quand $R = 1$, une telle décomposition n'existe pas forcément. La M_q-fonction $f(z) = \prod_{k\geq 0}(1 - 2z^{q^k})$ introduite dans la remarque 2.6 fournit un contre-exemple car elle possède une infinité de zéros dans $D(0, 1)$.

Introduisons la définition suivante.

Définition 7.6. Soient $f(z)$ une M_q-fonction et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, qui n'est pas un pôle de f. La *multiplicité* de f en α est définie comme le supremum des entiers m tel qu'il existe $P(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ de degré au plus $m - 1$ pour lequel le quotient

$$\frac{f(z) - P(z)}{(z - \alpha)^m}$$

est bien défini au point α.

Remarque 7.7. Si $f(z) = \sum_n \eta_n (z - \alpha)^n$ est le développement de Taylor de $f(z)$ en α et que la multiplicité de f en α est finie, alors m est le plus petit entier pour lequel $\eta_m \notin \overline{\mathbb{Q}}$. En particulier, la multiplicité est nulle si et seulement si $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Lemme 7.8. *Soient $1, f(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ des M_q-fonctions linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et formant un vecteur solution d'un système q-mahlérien linéaire associé à une matrice $A(z)$. Supposons que ces fonctions sont définies en α et que α^q est un point régulier pour ce système. Alors, la multiplicité de f en α est majorée par l'ordre de α comme pôle de* $\det A(z)$.

Démonstration. On procède par récurrence sur l'ordre ν de α en tant que pôle de $\det A(z)$.

Supposons que $\nu = 0$. On prouve dans un premier temps que la matrice $A^{-1}(z)$ est définie au point α. Le point α^q étant régulier pour le système et les fonctions $1, f(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ linéairement indépendantes, il découle du théorème M2 que les nombres $1, f(\alpha^q), \ldots, f_n(\alpha^q)$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Notons $F(z)$ le vecteur colonne formé des fonctions $1, f(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$, de sorte que

$$F(z) = A^{-1}(z)F(z^q)\,.$$

Comme les coordonnées de $F(\alpha^q)$ sont linéairement indépendantes et comme $F(z)$ est bien défini en α, la matrice $A^{-1}(z)$ est bien définie en α. Comme

$\nu = 0$, $\det A(z)$ est bien défini en α. Alors, la matrice $A(z)$ – qui est le produit de la transposée de la comatrice de $A^{-1}(z)$ par $\det A(z)$ – est bien définie en α. Le fait que les matrices $A(z)$ et $A^{-1}(z)$ sont bien définies en α et que α^q est un point régulier implique que le point α est lui-même régulier. Puisque les fonctions $1, f(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ sont linéairement indépendantes, il résulte du théorème M2 que $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Ainsi, la multiplicité de f en α est nulle et donc bien inférieure ou égale à ν.

Soit $\nu \geq 1$. Supposons le résultat montré pour l'ordre $\nu - 1$. Supposons maintenant que l'ordre de α comme pôle de $\det A(z)$ est égal à ν. Si $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$, sa multiplicité est nulle, donc inférieure à ν. On peut donc supposer que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Posons $g(z) := (f(z) - f(\alpha))/(z - \alpha)$ et notons que g est une M_q-fonction qui est bien définie en α. On obtient que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ g(z^q) \\ f_2(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix} = P(z^q)A(z)P(z)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ g(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$$

où

$$P(z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-f(\alpha)}{z-\alpha} & \frac{1}{z-\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $B(z) := P(z^q)A(z)P(z)^{-1}$. Comme

$$\det B(z) = \frac{\det A(z)(z - \alpha)}{z^q - \alpha},$$

l'ordre de α comme pôle de $\det B(z)$ est égal à $\nu - 1$. Notons que le point α^q reste régulier pour ce nouveau système. Par hypothèse de récurrence, on obtient que la multiplicité de g en α est au plus $\nu - 1$ et donc que la multiplicité de f en α est au plus ν. $\square$

Démontrons d'abord la Proposition 7.4 dans le cas où f est analytique sur le disque $D(0, R)$.

Proposition 7.9. *La proposition 7.4 est vraie si la fonction f est analytique sur $D(0, R)$.*

Démonstration. Notons tout d'abord que si $f(z)$ est une fraction rationnelle, on peut écrire $f(z) = R_1(z)$ et le résultat est prouvé. On supposera donc que $f(z)$ n'est pas rationnelle, ce qui implique que $f(z)$ est transcendante (voir, par exemple, [16]).

Nous procédons par récurrence sur la somme S des multiplicités de $f(z)$ aux points de $\overline{\mathbb{Q}} \cap D(0, R)$. Prouvons dans un premier temps que S est finie. Notons tout d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de points pour lesquels la multiplicité de $f(z)$ est non nulle. En effet, il découle de la proposition 4.1 appliquée avec $f_1(z) = f(z)$ and $f_2(z) = 1$ qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap D(0, R)$ tel que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$ (voir aussi [14, Theorem

3] pour une autre démonstration de cette affirmation reposant uniquement sur le théorème M1). Il suffit donc de montrer que la multiplicité de f en tout point de $\overline{\mathbb{Q}} \cap D(0,R)$ est finie. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap D(0,R)$. Considérons l'équation inhomogène q-mahlérienne d'ordre minimal satisfaite par $f(z)$ et notons m son ordre. Comme f est transcendante, $m \geq 1$. Les fonctions $1, f(z), f(z^q), \ldots, f(z^{q^{m-1}})$ sont donc linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, bien définies en α et liées par un système q-mahlérien. Notons $A(z)$ la matrice correspondante. Il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que le point α^{q^ℓ} est régulier pour ce système. Considérons le système q^ℓ-mahlérien obtenu par itération du système précédent, c'est-à-dire associé à la matrice

$$B(z) := A(z)A(z^q) \cdots A(z^{q^{\ell-1}})\,.$$

Le point α^{q^ℓ} est régulier pour ce système et $1, f(z), f(z^q), \ldots, f(z^{q^{m-1}})$ forment un vecteur solution. Il découle du lemme 7.8, appliqué avec $n = m-1$, q^ℓ à la place de q et $B(z)$ à la place de $A(z)$, que la multiplicité de $f(z)$ en α est inférieure à l'ordre de α comme pôle de $\det B(z)$. En particulier, elle est finie. La somme S est donc finie.

Supposons que $S = 0$. Alors, $f(z)$ prend des valeurs transcendantes en tout point de $D^*(0,R)$ et il suffit de choisir $R_1 := 0$, $R_2 := 1$ et $g := f$.

Supposons à présent que $S \geq 1$ et que le résultat est démontré pour toute M_q-fonction analytique sur le disque $D(0,R)$ dont la somme des multiplicités est strictement inférieure à S. Soit α un point tel que la multiplicité de f en α est strictement positive. D'après la remarque 7.7, cela signifie que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Soit $\mathbb{L}$ la clôture galoisienne de $\mathbb{K}(\alpha)$ sur $\mathbb{K}$. Posons $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Notons que d'après le corollaire 6.6, on a $f(\alpha) \in \mathbb{K}(\alpha) \subset \mathbb{L}$. Considérons la fraction rationnelle

$$r(z) := \sum_{\tau \in G} \frac{1}{z - \tau(\alpha)}\,.$$

Elle appartient à $\mathbb{K}(z)$ puisqu'elle est invariante par l'action de G. Les points de la forme $\tau(\alpha)$ sont les pôles de $r(z)$. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_t$ les zéros de $r(z)$ comptés avec multiplicité et $p(z) = \prod_i (z - \xi_i) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$. Comme $r(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$, on a $p(z) \in \mathbb{K}[z]$. Notons par ailleurs que $p(\tau(\alpha)) \neq 0$ pour tout $\tau \in G$. Par construction, la fraction rationnelle $r(z)/p(z)$ n'a donc aucun zéro et ses pôles sont les points de la forme $\tau(\alpha)$. On définit la fonction

$$h(z) := \sum_{\tau \in G} \frac{f(z)/p(z) - \tau(f(\alpha))/p(\tau(\alpha))}{z - \tau(\alpha)}\,.$$

C'est une M_q-fonction. De plus, comme $h(z)$ est fixée par G, on a $h(z) \in \mathbb{K}[[z]]$. Montrons que h est analytique sur $D(0,R)$. Il est immédiat que h est analytique en tout point de $D(0,R)$ qui n'est ni de la forme $\tau(\alpha)$ pour un $\tau \in G$, ni une racine de $p(z)$. D'autre part, si $\tau(\alpha) \in D(0,R)$, $\tau \in G$, la proposition 7.1 implique que $\tau(f(\alpha)) = f(\tau(\alpha))$ et donc que h est analytique au point $\tau(\alpha)$. Enfin, si ξ est une racine de p, alors comme

$$h(z) = f(z)\frac{r(z)}{p(z)} - \sum_{\tau \in G} \frac{\tau(f(\alpha))/p(\tau(\alpha))}{z - \tau(\alpha)} \tag{7.4}$$

et comme $r(z)/p(z)$ est analytique en ξ et que $\xi \notin \{\tau(\alpha) : \tau \in G\}$, on obtient que h est analytique au point ξ. Ainsi, h est analytique sur $D(0,R)$.

Soit m la multiplicité de $f(z)$ en α. Comme α n'est pas une racine de $p(z)$, la multiplicité de $f(z)/p(z)$ en α est aussi égale à m (cf. remarque 7.7). Ainsi, la multiplicité en α de la fonction

$$\frac{f(z)/p(z) - \tau(f(\alpha))/p(\tau(\alpha))}{z - \tau(\alpha)}$$

est égale à m si $\tau(\alpha) \neq \alpha$ et à $m-1$ si $\tau(\alpha) = \alpha$. On en déduit que la multiplicité de h en α est strictement inférieure à celle de f. On prouve de façon similaire que, pour tout point de la forme $\tau(\alpha)$ tel que $\tau(\alpha) \in D(0,R)$, la multiplicité de h en $\tau(\alpha)$ est strictement inférieure à celle de f en $\tau(\alpha)$. Prouvons à présent qu'en tout point $\xi \in \overline{\mathbb{Q}} \cap D(0,R)$, qui n'est pas de la forme $\tau(\alpha)$, la multiplicité de h est égale à celle de f. On écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\xi)^n \quad \text{et} \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\xi)^n$$

les développements de Taylor de $f(z)$ et $h(z)$ au voisinage de ξ. Soit m la multiplicité de $f(z)$ en ξ. Alors, d'après la remarque 7.7, on a $a_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $n < m$ et $a_m \notin \overline{\mathbb{Q}}$. Comme les fractions $(z-\tau(\alpha))^{-1}$, $\tau \in G$, et $r(z)/p(z)$ admettent un développement en série entière à coefficients algébriques au voisinage de ξ, on déduit de (7.4) que $b_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $n < m$, tandis que pour $n = m$, on a

$$b_m = a_m \frac{r(\xi)}{p(\xi)} + \theta\,,$$

où θ est un nombre algébrique. Comme la fraction rationnelle $r(\xi)/p(\xi)$ n'est pas nulle et que a_m est transcendant, le nombre b_m est transcendant. Ainsi, la multiplicité de h en ξ est égale à m. Au final, la somme des multiplicités de h est strictement inférieure à S. Par hypothèse de récurrence, il existe $A_1(z), A_2(z) \in \mathbb{K}(z)$ et $g(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ analytique et purement transcendante sur $D(0,R)$, tels que

$$h(z) = A_1(z) + A_2(z)g(z)\,.$$

On définit alors

$$\delta(z) := \frac{p(z)}{r(z)} \text{ et } \gamma(z) := \delta(z)\left(\sum_{\tau\in G} \frac{\tau(f(\alpha))/p(\tau(\alpha))}{z-\tau(\alpha)}\right)$$

Par construction, $\delta(z)$ et $\gamma(z)$ appartiennent à $\mathbb{K}(z)$. Par ailleurs, on a

$$f(z) = \delta(z)h(z) + \gamma(z)\,.$$

En posant $R_1(z) := A_1(z)\delta(z) + \gamma(z)$ et $R_2(z) := A_2(z)\delta(z)$, on obtient

$$f(z) = R_1(z) + R_2(z)g(z)$$

comme souhaité. □

Démonstration de la Proposition 7.4. Nous procédons par récurrence sur la somme S des ordres des pôles de f dans $D(0,R)$, comptés avec multiplicité.

Si $S = 0$, f est analytique sur $D(0,R)$ et le résultat correspond à la proposition 7.9.

Supposons à présent que $S \geq 1$ et que le résultat est démontré quand la somme des ordres pôles est au plus $S-1$. Soit α un pôle de $f(z)$ et $D(z)$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$. Alors la somme des ordres des pôles de

$D(z)f(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ est strictement inférieure à S. Par hypothèse de récurrence, il existe $A_1(z), A_2(z) \in \mathbb{K}(z)$ et $g(z) \in \mathbb{K}[[z]]$, analytique et purement transcendante sur $D(0,R)$, tels que

$$D(z)f(z) = A_1(z) + A_2(z)g(z)\,.$$

En posant $R_1(z) := A_1(z)/D(z)$ et $R_2(z) := A_2(z)/D(z)$, on obtient le résultat souhaité. □

8. Exemples de relations non banales

Nous illustrons le théorème 1.1 à travers quelques exemples.

Exemple 8.1. D'après la proposition 4.1, le lieu des relations non banales entre des E-fonctions fixées est un ensemble fini. Réciproquement, tout ensemble fini $\mathcal{S} \subset \overline{\mathbb{Q}}^*$ est le lieu des relations banales entre certaines E-fonctions. En effet, considérons $f(z) := P(z)e^z$, où $P(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est à racines simples avec $\mathcal{S}$ comme ensemble de racines. On obtient que $f(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$ et $f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^* \setminus \mathcal{S}$. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ correspond au lieu des relation non banales pour $\{f\}$. Notons que pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, la relation $f(\alpha) = 0$ s'obtient comme dégénérescence de la relation différentielle

$$(P' + P)f - Pf' = 0\,.$$

Exemple 8.2. Considérons la fonction de Bessel

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

et posons

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^4 2^{2n}} - \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!2^{2n-1}}\right)x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!n!}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}\,.$$

En $z = 1$, on a la relation algébrique suivante :

$$f(1) - J_0(1)^2 = 0\,. \tag{8.1}$$

On peut vérifier que cette relation s'obtient par dégénérescence de la relation algébro-différentielle suivante entre f et J_0 :

$$f(z) - J_0(z)^2 + (z-1)J_0'(z) = 0\,. \tag{8.2}$$

Comme $J_0(z)$ et $J_0'(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, il en va de même, d'après (8.2), de $f(z)$ et $J_0(z)$. En particulier, la relation (8.1) est non banale relativement à $\{f(z), J_0(z)\}$.

Exemple 8.3. Considérons $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $a_n \in \{0,1\}$ désigne le nombre d'occurences du chiffre 2 dans l'écriture ternaire de n, compté modulo 2. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une variante de la célèbre suite de Thue-Morse. Des relations $a_{3n} = a_{3n+1} = a_n$ et $a_{3n+2} = 1 - a_n$, on déduit que $f(z)$ est une M_3-fonction, solution de l'équation 3-mahlérienne inhomogène

$$\frac{z^2}{1-z^3} - f(z) + (1 + z - z^2)f(z^3) = 0\,. \tag{8.3}$$

Posons $\varphi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La relation σ_3-linéaire (8.3) entre 1 et f dégénère au point φ en

$$\frac{\varphi^2}{1-\varphi^3} - f(\varphi) = 0\,.$$

En particulier, $f(\varphi) \in \overline{\mathbb{Q}}$. En raisonnant par récurrence à partir de (8.3), on obtient que pour tout $\ell \geq 0$, $f(\varphi^{1/3^\ell}) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Par ailleurs, on peut montrer que f n'est pas rationnelle et l'on obtient donc qu'il existe une relation linéaire non banale relativement à $\{1, f\}$ en tout point de la forme $\varphi^{1/3^\ell}$, $\ell \geq 0$. Le lieu des relations non banales est donc infini, bien qu'il soit fini sur tout disque $D(0, R)$, $0 < R < 1$, comme le garantit la proposition 4.1.

Notons qu'une relation linéaire entre 1 et $f(\varphi^{1/3})$ s'obtient par dégénérescence de la relation σ_3-linéaire

$$\frac{z^2+z^5+z^6+z^7}{1-z^9} - f(z) + (1+z-z^2)(1+z^3-z^6)f(z^9) = 0\,,$$

laquelle s'obtient à partir de (8.3) et donne

$$\frac{\varphi^{2/3}+\varphi^{5/3}+\varphi^{6/3}+\varphi^{7/3}}{1-\varphi^3} - f(\varphi^{1/3}) = 0\,.$$

De façon générale, on peut montrer que toute relation linéaire entre 1 et $f(\varphi^{1/3^\ell})$ peut s'obtenir par dégénérescence d'une relation σ_3-linéaire de profondeur $\ell+1$, c'est-à-dire faisant intervenir la fonction $\sigma_3^{\ell+1}(f)$ et qu'on ne peut l'obtenir comme dégénérescence d'une relation de profondeur moindre.

Cet exemple met en évidence une différence avec le cas des E-fonctions, où l'on peut obtenir toutes les relations non banales entre $f_1(\alpha), \ldots, f_r(\alpha)$ par dégénérescence de relations algébro-différentielles dont la profondeur est bornée indépendamment de α. Pour obtenir un résultat analogue pour les M_q-fonctions, il faut alors restreindre leur étude au disque $D(0, R)$ où $R < 1$ est préalablement fixé.

Exemple 8.4. Les suites de Baum-Sweet et Rudin-Shapiro figurent parmi les exemples classiques de suites automatiques (cf. [10, Chapter 5]). Notons $f(z)$ la série génératrice associée à la suite de Baum-Sweet et $g(z)$ celle associée à la suite de Rudin-Shapiro. Ce sont deux M_2-fonctions solutions des équations suivantes :

$$f(z) - zf(z^2) - f(z^4) = 0 \quad \text{et} \quad g(z) + (z-1)g(z^2) - 2zg(z^4) = 0\,.$$

Considérons la M_2-fonction $h(z) := (1-3z)f(z^2)^3 + f(z)g(z)$. D'après [34, Section 9.3], les fonctions $f(z)$, $f(z^2)$, $g(z)$ et $g(z^2)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. On en déduit que $h(z)$, $f(z)$ et $g(z)$ le sont également. Par ailleurs, on a

$$f\left(\frac{1}{3}\right) g\left(\frac{1}{3}\right) - h\left(\frac{1}{3}\right) = 0\,, \tag{8.4}$$

qui est donc nécessairement une relation non banale relativement à $\{f, g, h\}$. Elle s'obtient par dégénérescence en $z = 1/3$ de la relation σ_2-algébrique

$$f(z)g(z) - h(z) + (1-3z)f(z^2)^3 = 0\,.$$

Exemple 8.5. Il peut également exister des relations σ_q-algébriques non triviales, mais qui ne sont source d'aucune dégénérescence. Voici un exemple. On note à nouveau $f(z)$ la série génératrice de la suite de Baum-Sweet (voir exemple 8.4). Notons $(n)_2$ le développement binaire de l'entier n et $S_2(n)$ la somme des chiffres binaires de n. Définissons alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} b_n &= 0 \quad \text{si } (n)_2 \text{ a un bloc de 0 consécutifs de longueur impair,} \\ b_n &= 1 \quad \text{si } (n)_2 \text{ ne contient pas de tel bloc et } S_2(n) \text{ est pair,} \\ b_n &= -1 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $g(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$. On peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} f(z) & g(z) \\ f(z^2) & -g(z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(z^2) & -g(z^2) \\ f(z^4) & g(z^4) \end{pmatrix}.$$

D'après [34], le groupe de Galois de ce système 2-mahlérien est $\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}})$. On peut alors utiliser la proposition 5.2 pour montrer que les relations σ_2-algébriques entre f et g sont engendrées par la relation

$$f(z)g(z^2) + f(z^2)g(z) = 2 \tag{8.5}$$

et leurs équations minimales respectives :

$$f(z) - zf(z^2) - f(z^4) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(z) + zg(z^2) - g(z^4) = 0\,.$$

Cependant, ces relations ne sont source d'aucune dégénérescence : $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$.

Références

[1] B. Adamczewski and J. P. Bell, *A problem about Mahler functions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **17** (2017), 1301–1355.

[2] B. Adamczewski, J. P. Bell, and D. Smertnig, *A height gap theorem for coefficients of Mahler functions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **25** (2023), 2525–2571.

[3] B. Adamczewski et C. Faverjon, *Méthode de Mahler : relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques*, Proc. London Math. Soc. **115** (2017), 55–90.

[4] B. Adamczewski et C. Faverjon, *Méthode de Mahler, transcendance et relations linéaires : aspects effectifs*, J. Théor. Nombres Bordeaux **30** (2018), 557–573.

[5] B. Adamczewski and C. Faverjon, *Mahler's method in several variables and finite automata*, preprint 2020, arXiv :2012.08283 [math.NT].

[6] B. Adamczewski and C. Faverjon, *A new proof of Nishioka's theorem in Mahler's method*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **361** (2023), 1011–1028.

[7] B. Adamczewski, T. Dreyfus, and C. Hardouin, *Hypertranscendence and linear difference equations*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), 475–503.

[8] B. Adamczewski, T. Dreyfus, C. Hardouin, and M. Wibmer, *Algebraic independence and linear difference equations*, to appear in J. Eur. Math. Soc. (JEMS), published online (2023), DOI 10.4171/JEMS/1316, 34 pp.

[9] B. Adamczewski and T. Rivoal, *Exceptional values of E-functions at algebraic points*, Bull. London Math. Soc. **50** (2018), 697–708.

[10] J.-P. Allouche and J. Shallit, Automatic sequences. Theory, applications, generalizations, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[11] Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique I. Théorèmes de pureté et de dualité*, Annals of Math. **151** (2000), 705–740.

[12] Y. André, *Séries Gevrey de type arithmétique II. Transcendance sans transcendance*, Annals of Math. **151** (2000), 741–756.

[13] Y. André, *Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties: a new differential Galois correspondence*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **47** (2014), 449–467.

[14] P.-G. Becker, *k-regular power series and Mahler-Type functional equations*, J. Number Theory **49** (1994), 269–286.

[15] T. Becker and V. Weispfenning, Gröbner bases. A computational approach to commutative algebra, *Graduate Texts in Mathematics* **141**, Springer-Verlag, New York, 1993.

[16] J. Bell, Jason, M. Coons, and E. Rowland, *The rational-transcendental dichotomy of Mahler functions*, J. Integer Seq. **16** (2013), Article 13.2.10, 11 pp.

[17] F. Beukers, *A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem*, Annals of Math. **163** (2006), 369–379.

[18] A. Bostan, T. Rivoal, and B. Salvy, *Minimization of differential equations and algebraic values of E-functions*, to appear in Math. Comp., prépublication 2022, arXiv :2209.01827 [math.NT].

[19] A. Bostan, F. Chyzak, M. Giusti, R. Lebreton, G. Lecerf, B. Salvy, É. Schost, Algorithmes Efficaces en Calcul Formel, `https://hal.science/AECF/`, 686 pp.

[20] N. Bourbaki, Elements of Mathematics. Algebra II. Chapters 4–7, Springer, Berlin, 2003.

[21] R. Feng, *Hrushovski's algorithm for computing the Galois group of a linear differential equation*, Adv. in Appl. Math. **65** (2015), 1–37.

[22] R. Feng, *On the computation of the Galois group of linear difference equations*, Math. Comp. **87** (2018), 941–965.

[23] S. Fischler and T. Rivoal, *Effective algebraic independence of values of E-functions*, Math. Z. **305**, Paper No. 48, 17 pp.

[24] S. Fischler and T. Rivoal, *Values of E-functions are not Liouville numbers*, J. Éc. polytech. Math. **11** (2024), 1–18.

[25] J. Fresan, *Une introduction aux périodes*, Périodes et transcendance, Éditions de l'École polytechnique, 2022.

[26] M. Kontsevicth and D. Zagier, *Periods*, in Mathematics unlimited–2001 and beyond, Springer, Berlin, 2001, p. 771–808.

[27] S. Lang, Algebra, Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics **21** Springer-Verlag, New York, 2002.

[28] L. Naguy and T. Szamuely, *A general theory of André's solution algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **70** (2020), 2003–2129.

[29] Ku. Nishioka, *New approach in Mahler's method*, J. reine angew. Math. **407** (1990), 202–219.

[30] P. Philippon, *Groupes de Galois et nombres automatiques*, J. Lond. Math. Soc. **92** (2015), 596–614.

[31] M. van der Put and M. F. Singer, Galois theory of difference equations, *Lecture Notes in Mathematics* **1666**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[32] M. van der Put and M. F. Singer, Galois theory of linear differential equations, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **328** Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[33] T. Rivoal, *Les E-fonctions et G-fonctions de Siegel*, prépublication 2019, à paraître aux Éditions de l'École polytechnique, 77 pp.

[34] J. Roques, *On the algebraic relations between Mahler functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 321–355.

[35] A. B. Shidlovskii, Transcendental numbers, *De Gruyter Studies in Mathematics* **12**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989.

[36] M. Waldschmidt, *Transcendence of periods : the state of the art*, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 435–463.

Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, F-69622 Villeurbanne Cedex, France
Email address: Boris.Adamczewski@math.cnrs.fr

Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, F-69622 Villeurbanne Cedex, France
Email address: faverjon@math.univ-lyon1.fr