Proc. London Math. Soc. (3) 115 (2017) 55–90
doi:10.1112/plms.12038

Méthode de Mahler : relations linéaires, transcendance et applications aux nombres automatiques

Boris Adamczewski et Colin Faverjon

Abstract

This paper is devoted to the so-called Mahler method. We precisely describe the structure of linear relations between values at algebraic points of Mahler functions. Given a number field $\mathbf{k}$, a Mahler function $f(z) \in \mathbf{k}\{z\}$, and an algebraic number α, $0 < |\alpha| < 1$, that is not a pole of f, we show that one can always determine whether the number $f(\alpha)$ is transcendental or not. In the latter case, we further obtain that $f(\alpha)$ belongs to the number field $\mathbf{k}(\alpha)$. We also discuss some consequences of this theory concerning a classical number theoretical problem: the study of the sequence of digits of the expansion of algebraic numbers in integer bases, or, more generally in algebraic bases. Our results are derived from a recent theorem of Philippon ['Groupes de Galois et nombres automatiques', *J. Lond. Math. Soc.* 95 (2015) 596–614] that we refine. We also simplify its proof.

Résumé

Cet article est consacré à la méthode de Mahler. Nous décrivons en détail la structure des relations de dépendance linéaire entre les valeurs aux points algébriques de fonctions mahlériennes. Étant donnés un corps de nombres $\mathbf{k}$, une fonction mahlérienne $f(z) \in \mathbf{k}\{z\}$ et α un nombre algébrique, $0 < |\alpha| < 1$, qui n'est pas un pôle de f, nous montrons notamment que l'on peut toujours déterminer si le nombre $f(\alpha)$ est transcendant ou non. Dans ce dernier cas, nous obtenons que $f(\alpha)$ appartient nécessairement à l'extension $\mathbf{k}(\alpha)$. Nous considérons également les conséquences de cette théorie concernant un problème arithmétique classique : l'étude de la suite des chiffres des nombres algébriques dans une base entière ou, plus généralement, algébrique. Nos résultats sont obtenus à partir d'un théorème récent de Philippon ['Groupes de Galois et nombres automatiques', *J. Lond. Math. Soc.* 95 (2015) 596–614] que nous raffinons et dont nous simplifions la démonstration.

Table des matières

1. *Introduction*

Étant donné un entier $q \geqslant 2$, une fonction $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ est dite *q-mahlérienne* s'il existe des polynômes $p_0(z), \ldots, p_n(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, non tous nul, tels que

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z^q) + \cdots + p_n(z)f(z^{q^n}) \;=\; 0. \tag{1.1}$$

Received 1 May 2016; revised 8 February 2017; published online 24 April 2017.

2010 *Mathematics Subject Classification* 11J81, 11J85 (primary), 11B85 (secondary).

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Grant Agreement No 648132.

Afin d'étudier ces fonctions, il est souvent commode de considérer les systèmes d'équations fonctionnelles de la forme :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

où $A(z)$ est une matrice de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ et les f_i sont des fonctions de la variable z, analytiques au voisinage de $z = 0$. Un tel système est appelé mahlérien. Par abus de langage, nous dirons que l'entier n est l'ordre du système (1.2). Une fonction $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ est q-mahlérienne si, et seulement si, $f(z)$ est une coordonnée d'un vecteur solution d'un système mahlérien.

Un nombre complexe α du disque unité ouvert est une *singularité* du système (1.2) s'il existe un entier positif ℓ tel que α^{q^l} soit un pôle d'un coefficient d'une des matrices $A(z)$ ou $A(z)^{-1}$. L'ensemble des singularités d'un système mahlérien peut donc être infini, mais il ne contient aucun point d'accumulation à l'intérieur du disque unité. Un élément du disque unité complexe ouvert qui n'est pas une singularité est dit *régulier* pour le système (1.2).

La méthode de Mahler, introduite à la fin des années vingt [**23**–**25**], vise à prouver des résultats de transcendance et d'indépendance algébrique pour les valeurs aux points algébriques réguliers de telles fonctions. Pour les aspects classiques de la théorie, nous renvoyons le lecteur à la monographie de Ku. Nishioka [**30**]. Évidemment, les définitions précédentes témoignent d'une forte analogie avec les E-fonctions introduites par Siegel : les équations différentielles sont remplacées par des équations aux différences associées à l'endomorphisme injectif de $\mathbb{C}[[z]]$ défini par $\sigma_q(f) = f(z^q)$. Notons toutefois deux différences importantes. Tout d'abord, une fonction mahlérienne n'est pas une fonction entière (sauf si c'est un polynôme), mais une fonction méromorphe sur le disque unité ouvert, le cercle unité formant une frontière naturelle [**33**]. Ensuite, une fonction mahlérienne non nulle peut prendre des valeurs algébriques en un nombre infini de points algébriques du disque unité ouvert. La théorie présente toutefois dans son développement une forte analogie avec celle des E-fonctions. L'analogue du théorème de Siegel–Shidlovskii a finalement été obtenu par Ku. Nishioka [**29**] en 1990, après plusieurs résultats partiels de différents auteurs dont Mahler, Kubota, Loxton et van der Poorten.

Théorème 1.1 (Nishioka). *Soient $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions analytiques convergentes sur le disque ouvert de rayon $\rho > 0$ et solutions d'un système du type* (1.2). *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < \rho$, un point régulier pour ce système. Alors*

$$\mathrm{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = \mathrm{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z)).$$

En 2006, Beukers [**10**] a obtenu, comme conséquence de travaux d'André [**6**, **7**], une version raffinée du théorème de Siegel–Shidlovskii. Ce résultat remarquable stipule que toute relation algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les valeurs de E-fonctions solutions d'un même système différentiel, en un point algébrique regulier pour ce système, s'obtient comme spécialisation en ce point d'une relation algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre ces E-fonctions. Une autre démonstration de ce résultat a récemment été donnée par André dans [**8**]. Inspiré par ces travaux, ainsi que par ceux de Nesterenko et Shidlovskii [**28**], Philippon [**31**, **32**] a montré comment on peut déduire un raffinement similaire, dans le contexte des sytèmes mahlériens, à partir du théorème 1.1.

Théorème 1.2 (Philippon). *Soient $f_1(z), \dots, f_n(z) \in \overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions solutions d'un système du type* (1.2). *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un point régulier pour ce système. Alors, pour tout $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$, de degré total d, tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$, il existe $Q \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1, \dots, X_n]$, de degré total d en $X_1, \dots, X_n$, tel que $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0$ et $Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n)$.*

Remarque 1.3. Lorsque Philippon nous a indiqué avoir démontré le théorème 1.2 en janvier 2015, nous lui avons indiqué les applications que nous savions en tirer, à savoir le théorème 1.7 et ses conséquences pour les nombres automatiques. Ce sont ces applications que nous présentons ici, ainsi que certains raffinements plus récents. Après cette discussion, Philippon a trouvé une autre approche lui permettant d'obtenir une version affaiblie du théorème 1.7, laquelle est devenue le théorème 1.5 de [**32**] (voir également la discussion [**32**, p. 598]).

Dans cet article, nous montrons tout d'abord comment simplifier la démonstration du théorème 1.2 et en obtenir une version homogène. Ce raffinement est vraiment l'exact analogue du théorème principal de Beukers dans [**10**]. Comme nous le verrons par la suite, disposer d'un énoncé homogène s'avère très utile pour l'étude des relations linéaires.

Théorème 1.4. *Soient $f_1(z),\dots,f_n(z)\in\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions solutions d'un système du type (1.2). Soit $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha|<1$, un point régulier pour ce système. Alors, pour tout polynôme homogène $P\in\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\dots,X_n]$, de degré total d, tel que $P(f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha))=0$, il existe un polynôme $Q\in\overline{\mathbb{Q}}[z,X_1,\dots,X_n]$, homogène de degré total d en $X_1,\dots,X_n$, tel que $Q(z,f_1(z),\dots,f_n(z))=0$ et $Q(\alpha,X_1,\dots,X_n)=P(X_1,\dots,X_n)$.*

Le théorème 1.4 implique le théorème 1.2. En effet, on peut toujours transformer une relation inhomogène en une relation homogène en ajoutant au système la fonction f_{n+1} constante et égale à 1. Dans ce nouveau système, la matrice $A(z)$ est remplacée par la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A(z) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

et l'ensemble des point réguliers reste inchangé.

Soit $\mathbf{k}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soit α un point du disque unité complexe ouvert tel que les fonctions $f_1(z),\dots,f_n(z)$ sont toutes définies en α, c'est-à-dire, tel que α n'est pôle d'aucune de ces fonctions. On définit le $\mathbf{k}$-espace vectoriel des relations linéaires entre les valeurs des fonctions f_i au point α par :

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}(f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha)) := \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{k}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\alpha)=0\right\}.$$

On définit également le $\mathbf{k}(z)$-espace vectoriel des relations linéaires fonctionnelles entre les $f_i(z)$ par :

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z)) := \left\{(w_1(z),\dots,w_n(z))\in\mathbf{k}(z)^n \mid \sum_{i=1}^n w_i(z)f_i(z)=0\right\}.$$

Enfin, on note ev_α l'application d'évaluation en $z=\alpha$. Dans le cas d'un polynôme homogène de degré un, le théorème 1.4 s'énonce alors de la façon suivante.

Corollaire 1.5. *Soit $\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha|<1$, un point régulier pour le système (1.2). On a :*

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha)) = \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z))\right).$$

En particulier, si les fonctions $f_1(z),\dots,f_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, alors les nombres $f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Remarque 1.6. Obtenir l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)$ à partir du théorème 1.2, nécessite une condition plus forte : l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ des fonctions $1, f_1(z), \ldots, f_n(z)$ (ou bien que l'une des f_i soit constante). Une telle condition n'est en général pas vérifiée. Par exemple, à tout automate fini on peut associer un systèmes mahlérien pour lequel la somme des fonctions $f_i(z)$ est égale à $1/(1-z)$. Le théorème 1.7 de [**31**] permet toutefois d'obtenir une telle conclusion dans un cas très particulier : le système doit admettre une matrice fondamentale de solutions dont les coefficients sont des fonctions analytiques dans le disque unité ouvert. Contrairement à ce qui est affirmé dans [**31**], le corollaire 1.5 montre qu'une telle restriction n'est pas nécessaire[†].

Les théorèmes 1.2 et 1.4 permettent en fait d'obtenir des résultats valables également en des points singuliers. Ainsi, un aspect remarquable du théorème suivant est qu'aucune condition de régularité n'est requise pour le point α. Nous donnerons en outre deux démonstrations différentes du point (i).

Théorème 1.7. *Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ des fonctions q-mahlériennes. Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions et* $\mathbf{k}$ *un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i.*

(i) *Si les nombres $f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)$ sont linéairement dépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, alors ils sont linéairement dépendants sur* $\mathbf{k}$.

(ii) *Plus précisément, on a :*

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\right) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left\{\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}\left(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\right)\right\}.$$

En utilisant le fait que la fonction $g \equiv 1$ est q-mahlérienne pour tout $q \geqslant 2$, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1.8. *Soient $f(z)$ une fonction q-mahlerienne et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, qui n'est pas un pôle de f. Soit* $\mathbf{k}$ *un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients de f. On a l'alternative suivante : soit $f(\alpha)$ est transcendant, soit $f(\alpha) \in \mathbf{k}$.*

Dans le cas particulier où $f(z)$ est une série automatique et α est un nombre rationnel, ce résultat a été conjecturé par Cobham en 1968 [**15**]. C'est précisément cette conjecture qui est à l'origine du présent travail. Nous donnons davantage de détails concernant l'histoire de ce problème section 2. Le corollaire 1.8 semble être le premier résultat de transcendance complètement général obtenu par la méthode de Mahler (*i.e.* valable pour toute fonction mahlérienne et en tout point algébrique de son domaine de définition). D'autre part, des exemples montrent que l'on ne peut se soustraire à l'alternative présente dans la conclusion du corollaire 1.8, même en supposant la fonction $f(z)$ transcendante (voir section 8).

Nous précisons ensuite le corollaire 1.5 et décrivons en détail l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))$, même lorsque α est une singularité du système. Étant donnés un système du type (1.2) et un entier $\ell \geqslant 1$, on pose

$$A_l(z) := A(z)A(z^q)\cdots A(z^{q^{l-1}})$$

et

$$\ker_{\mathbf{k}} A_l(\alpha) := \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{k}^n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)A_l(\alpha) = 0\right\}.$$

[†]Cette erreur a ensuite été corrigée dans la verison publiée [**32**].

On fixe également un nombre réel ρ, $0 < \rho < 1$, strictement inférieur au minimum des modules des pôles (non nuls) de la matrice $A(z)$ et des racines (non nulles) de son déterminant. Ainsi, la matrice $A(z)$ est définie et inversible sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$.

THÉORÈME 1.9. *Soient $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ des fonctions solutions d'un système du type (1.2). Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, et $\mathbf{k}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i. Soit l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho$. Si α n'est pas un pôle de $A_l(z)$, alors*

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}(f_1(\alpha),\ldots,f_n(\alpha)) = \ker_{\mathbf{k}} A_l(\alpha) + \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))\right).$$

La seule restriction dans le théorème précédent vient du fait que l'on doit supposer que le nombre α n'est pas un pôle de $A_l(z)$. En complément, nous montrons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.10. *Soient $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ des fonctions solutions d'un système du type (1.2). Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, et $\mathbf{k}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i. Supposons que les f_i soient définies au point α. Soit l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho$. Alors, il existe une matrice $B(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k}(z))$ satisfaisant aux conditions suivantes.*

(i) *On a :*

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^l}) \end{pmatrix}.$$

(ii) *Le point α n'est pas un pôle de $B(z)$.*

(iii) *Le point α^{q^l} est régulier pour le système* (i).

En outre, si les fonctions $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}(z)$, on a $B(z) = A_l(z)$.

Les théorèmes 1.7 et 1.9 décrivent totalement la structure des relations linéaires entre les valeurs de fonctions solutions d'un système mahlérien en un point algébrique α de leur domaine d'holomorphie. Il en existe de deux sortes : les relations d'origine « matricielle » et celles d'origine « fonctionnelle ». Les relations matricielles sont les éléments de l'espace $\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A_l(\alpha)$ et leur recherche se réduit donc au calcul du noyau d'une matrice explicite. Les relations d'origine fonctionnelle correspondent aux éléments de l'espace $\mathrm{ev}_\alpha(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z)))$. Pour les trouver, il faut donc être capable de déterminer une base de l'espace $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ des relations de dépendance linéaire entre fonctions d'un système mahlérien. Rappelons que décrire les relations de dépendance algébrique entre les solutions d'un système mahlerien est une tâche ardue, en témoigne le peu de résultats obtenus jusqu'à présent (voir par exemple [**30**, Chap. 5] et plus récemment [**12**, **35**]). *A contrario*, nous montrerons que l'espace $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ a une description simple. Il est engendré par des relations linéaires de « petits degrés », calculables de manière effective. Plus précisément, le théorème 7.1 montre que $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ est isomorphe au noyau d'une matrice explicite.

Finalement, les théorèmes 1.9, 1.10, 7.1 et 7.2, et leurs démonstrations fournissent un algorithme permettant de répondre en toute généralité à la question suivante : étant donnés $f(z)$ une fonction mahlérienne[†] et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique, $f(\alpha)$ est-il algébrique ou transcendant ? Plus généralement, étant donnés des fonctions q-mahlériennes $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ et α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions, on peut

[†]De façon équivalente, $f(z)$ peut-être définie par la donnée d'un système du type 1.2 ou d'une équation du type 1.1, ainsi que d'un nombre suffisant de coefficients.

déterminer de façon algorithmique une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$. Cette aspect de notre approche est détaillé dans la note [4].

Cet article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous donnons des éléments historiques concernant la conjecture de Cobham sur la suite des chiffres des nombres algébriques dans une base entière, ainsi que ses liens avec la méthode de Mahler et la théorie des automates finis. Cette conjecture, proposée en 1968 et qui découle du théorème 1.7, a été la source principale de motivation pour le présent travail. Dans la section 3, nous revenons sur la démonstration du théorème de Philippon, puis nous en démontrons une version homogène (le théorème 1.4) dans la section 4. Une première démonstration du point (i) du théorème 1.7 est donnée dans la section 5, tandis que les théorèmes 1.7, 1.9 et 1.10 sont démontrés dans la section 6. Dans la section 7, nous étudions les relations fonctionnelles de dépendance linéaire entre les solutions d'un système mahlérien et démontrons les théorèmes 7.1 et 7.2. Dans la section 8, nous illustrons les résultats obtenus à travers l'étude de deux exemples de systèmes mahlériens automatiques.

2. *La conjecture de Cobham et les nombres automatiques*

La théorie des E-fonctions, introduite par Siegel, doit sans conteste son succès à la transcendence des nombres e et π, ainsi qu'au théorème de Lindemann–Weierstrass. On ne connaît en revanche aucune constante mathématique classique liée à la valeur en un point algébrique d'une fonction mahlérienne. Cela explique sans doute le faible développement qu'a connu la théorie de Mahler durant presque cinquante ans. Pourtant, dès 1968, Cobham jeta un pont entre la théorie des automates finis et la transcendance, offrant ainsi à la théorie de Mahler le problème nécessaire à son développement. Nous rappelons brièvement ici l'histoire de ce problème qui a été la source principale de motivation pour ce travail.

2.1. *La suite de schiffres des nombres algébriques*

L'étude de la suite des chiffres de constantes mathématiques classiques comme

$$\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,078\,569\cdots$$

ou

$$\pi \;= 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\cdots$$

est source de mystère et de frustration depuis des décennies. Tandis que ces nombres admettent une desciption géométrique particulièrement simple, leurs suites de chiffres semblent au contraire être le reflet de phénomènes complexes. Plusieurs langages ont été utilisés afin de formaliser ce constat : celui des probabilités par É. Borel [11], celui des systèmes dynamiques topologiques par Morse et Hedlund [27] et enfin celui des machines de Turing et de la complexité algorithmique par Hartmanis et Stearns [17]. Chacun de ces points de vue conduit à son propre florilège de conjectures, le plus souvent hors d'atteinte.

On sait depuis Turing [36] que les nombres réels peuvent être grossièrement divisés en deux catégories. D'un côté, les nombres calculables, dont le développement binaire ou décimal peut être produit par une machine de Turing, et de l'autre, les nombres incalculables, dont la complexité échapera à jamais à la sagacité des ordinateurs. Alors que la plupart des nombres ne sont pas calculables, les constantes mathématiques classiques, comme les nombres algébriques, le sont généralement. En 1965, Hartmanis et Stearns [17] ont été parmi les premiers à considérer la question fondamentale de la difficulté du calcul d'un nombre réel, introduisant les classes de complexité en temps. La notion de complexité en temps rend compte du nombre d'opérations élémentaires nécessaires à une machine de Turing déterministe à plusieurs rubans pour produire les n premiers chiffres du développement binaire d'un nombre donné. Un nombre réel est alors considéré comme d'autant plus simple que ses chiffres peuvent être calculés rapidement par une machine de Turing. À la fin de leur article, Hartmanis et Stearns pose la question suivante:

Existe-t-il des nombres algébriques irrationnels pour lesquels les n premiers chiffres binaires peuvent être calculés en $O(n)$ opérations par une machine de Turing déterministe à plusieurs rubans ?

Malheureusement, ce problème demeure encore largement ouvert (voir la discussion dans [3]).

2.2. *Automates finis et méthode de Mahler*

En 1968, Cobham [13–15] rédige une série de rapports dans lesquels il propose de restreindre le problème de Hartmanis–Stearns à certaines classes de machines de Turing et en premier lieu aux automates finis. Dans [15], Cobham énonce le « théorème » suivant sans en donner de démonstration. Le théorème 1.7 en fournit finalement une, presque cinquante ans plus tard.

THÉORÈME. *Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z) \in \mathbb{Q}\{z\}$ des fonctions solutions d'un système du type (1.2) et analytiques sur le disque unité ouvert. Soit α, $0 < |\alpha| < 1$ un nombre rationnel. Alors pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, le nombre*

$$\lambda_1 f_1(\alpha) + \cdots + \lambda_n f_n(\alpha)$$

est soit rationnel, soit transcendant.

Cobham montre dans [15] que si une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ peut être engendrée par un automate fini, alors la série génératrice $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est mahlérienne. Cela jette un pont entre la méthode de Mahler et la complexité de la suite des chiffres des nombres algébriques. En particulier, cela montre que le « théorème » implique le corollaire suivant. Ce corollaire, devenu la conjecture de Cobham, fournira une motivation importante au développement de la méthode de Mahler à partir des années 80 et de la popularisation par Mendès France [26] des travaux de Cobham auprès des spécialistes de transcendance.

COROLLAIRE (CONJECTURE DE COBHAM). *Le développement dans une base entière d'un nombre algébrique irrationnel ne peut être engendré par un automate fini.*

À ce stade, il est intéressant de noter que Cobham ignorait vraisemblablement l'existence des travaux de Mahler. Il avait seulement connaissance de ceux de Siegel concernant les E-fonctions à travers le livre de Gel'fond [16]. C'est donc de façon indépendante qu'il a redécouvert les équation fonctionnelles mahlériennes et c'est l'analogie avec la théorie des E-fonctions qui l'a poussé à conjecturer, avec une remarquable clairvoyance, l'alternative fondamentale donnée dans son « théorème ». La conjecture de Cobham a finalement été prouvée dans [1] par une approche totalement différente qui repose sur l'utilisation d'un outil diophantien puissant : une version p-adique du théorème du sous-espace (voir [1, 2]). Plus généralement, dans la direction du théorème, l'alternative $f(\alpha)$ est soit dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, soit transcendant, a été démontrée :

- dans le cas où $f(z)$ est une série automatique et α est l'inverse d'un nombre de Pisot ou de Salem par le premier auteur et Bugeaud [1].
- dans le cas où $f(z)$ est une série régulière et α est l'inverse d'un entier par Bell, Bugeaud et Coons [9].

Ces résultats nécessitent également l'utilisation du théorème du sous-espace p-adique et ne relève donc pas directement de la méthode de Mahler.

Dans les années 80, plusieurs auteurs, et en particulier Loxton et van der Poorten [20–22], ont essayé de démontrer le théorème 1.1 de Nishioka. Ces derniers ont par ailleurs affirmé que la conjecture de Cobham en découlerait. Or, il y a clairement deux obstructions majeures à une telle implication :

(i) Étant donnée une série automatique transcendante $f(z)$, on peut toujours trouver un système mahlérien et un vecteur de solution $f_1(z) := f(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$. Si α n'est pas une singularité du système, la transcendance de $f(z)$ donne seulement, avec le théorème 1.1, qu'au moins l'un des nombres $f(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)$ est transcendant, à moins que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ ne soient algébriquement indépendantes. Mais il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'une telle condition soit vérifiée.

(ii) Même si l'on parvient à s'extraire du point précédent, il se pourrait que le point α soit une singularité du système étudié.

Le théorème 1.2 de Philippon permet de surmonter le point (i) puisque l'on peut toujours s'assurer, quitte à réduire le système et y ajouter la fonction constante égale à 1, que les fonctions $1, f_1(z) := f(z), \ldots, f_n(z)$ sont linéairement indépendantes. On en déduit alors l'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres $1, f(\alpha), f_2(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)$, ce qui donne immédiatement la transcendance de $f(\alpha)$, lorsque α n'est pas une singularité du système. Le fait que l'on puisse également s'affranchir du point (ii) en comprenant la nature de $f(\alpha)$ également aux points singuliers du système est, en un sens, l'objet principal de cet article (voir les démonstrations des théorèmes 1.7 et 1.9).

2.3. *Développements des nombres algébriques dans une base algébrique*

L'utilisation du théorème du sous-espace est plus souple que la méthode de Mahler car elle ne requiert la présence d'aucune équation fonctionnelle. Par contre, lorsqu'elle s'applique, la méthode de Mahler a plusieurs avantages. Elle donne lieu à des résultats d'indépendance algébrique et elle permet également de traiter le cas de toutes les bases algébriques et pas seulement celles qui sont des nombres de Pisot ou de Salem.

Soit $\beta > 1$ un nombre réel non entier. On définit l'application T_β sur $[0, 1]$ par $T_\beta : x \longmapsto \beta x \bmod 1$. Le β-développement d'un nombre $x \in [0, 1[$, noté $d_\beta(x)$, est alors définit par :

$$d_\beta(x) := 0.x_1x_2\ldots,$$

où $x_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor$. Ce développement, introduit par Rényi [**34**], coïncide avec celui obtenu en utlisant l'algorithme glouton. Les chiffres x_i appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, \lfloor \beta \rfloor\}$. Un exemple classique est le développement en base φ (le nombre d'or). Dans ce cas précis, la différence avec une base entière n'est pas flagrante, mais, de façon générale, l'étude des bases algébriques est bien plus complexe que celle des bases entières. Le plus souvent, on ne sait par exemple même pas caractériser les nombres ayant un β-développement ultimement périodique. Certaines bases, comme la base 3/2, semble particulièrement retorse et nos connaissances sont alors très limitées. Le corollaire 1.8 donne directement le résultat général suivant.

Corollaire 2.1. — *Soit $\beta > 1$ un nombre algébrique réel et α un nombre réel algébrique n'appartenant pas à $\mathbb{Q}(\beta)$. Alors le β-développement de α ne peut être engendré par un automate fini.*

Ainsi, le développement de $\sqrt{2}$ en base 3/2 ne peut être engendré par un automate fini. Il semble difficile d'obtenir ce résultat en utilisant l'approche de [**1**]. Une raison technique pour cela est que la hauteur du nombre 3/2 est égale à 3 qui est strictement supérieur à 3/2.

3. *Remarques sur la démonstration de Philippon*

Nous revenons tout d'abord sur la démonstration du théorème 1.2 donnée par Philippon dans [**32**]. Notre but est de montrer comment en simplifier l'exposition. La démonstration de Philippon se décompose en deux parties principales. Tout d'abord, une première étape consiste à montrer que le théorème est vrai pour tout point α appartenant à un certain voisinage de l'origine. C'est ce que nous appellerons ici le « théorème local » et qui correspond à la proposition 4.4 de [32]. La seconde étape est assez courte et correspond à la démonstration du corollaire 4.5 dans [32] ; il s'agit de montrer que le théorème local implique en fait le théorème global. L'idée astucieuse introduite par Philippon est la suivante. Si α n'est pas une singularité du système, une relation algébrique entre les fonctions f_i au point α se transporte naturellement, par itération de l'équation fonctionnelle, en une relation algébrique aux points α^{q^l}. Pour l suffisamment grand, α^{q^l} appartient au domaine de validité du théorème local, que l'on peut donc appliquer. Le fait que α ne soit pas une singularité permet finalement d'obtenir, par itération de la matrice inverse qui est bien définie, le théorème au point α.

Nous nous intéressons maintenant à la démonstration du théorème local. Philippon suit la démarche introduite par Nesterenko et Shidlovskii [28] dans le cadre des E-fonctions. Nous nous proposons d'axiomatiser un peu celle-ci en extrayant de [28] le résultat suivant qui ne requiert la présence d'aucune équation différentielle ou fonctionnelle. La démonstration de la proposition 3.1 donnée ici reprend les arguments de [28] et [32]. Il s'agit simplement d'une égalité de dimension qui repose sur des principes de base d'algèbre commutative et un résultat de Krull [18]. Elle est également à rapprocher du Corollary 1.7.1 obtenu par André dans [8].

PROPOSITION 3.1. *Soient $f_1(z),\dots,f_n(z)\in\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(i) *Il existe $\rho>0$ tel que pour tout nombre algébrique α, $0<|\alpha|<\rho$, on ait :*

$$\operatorname{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha))=\operatorname{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z)).$$

(ii) *L'extension $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z),\dots,f_n(z))$ est régulière, ce qui signifie que tout élément de $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z),\dots,f_n(z))$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est un élément de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Alors, il existe $\rho'>0$ tel que pour tout nombre algébrique α, $0<|\alpha|<\rho'$ et tout polynôme $P\in\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\dots,X_n]$, de degré total d, tel que $P(f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha))=0$, il existe $Q\in\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1,\dots,X_n]$, de degré total d en $X_1,\dots,X_n$, tel que $Q(z,f_1(z),\dots,f_n(z))=0$ et $Q(\alpha,X_1,\dots,X_n)=P(X_1,\dots,X_n)$.

Démonstration. On note $\mathfrak{P}$ l'idéal premier de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1,\dots,X_n]$ des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f_1(z),\dots,f_n(z)$. Étant donné α un nombre algébrique tel que les fonctions f_i soient toutes définies en α, on note également $\mathfrak{P}_\alpha$ l'idéal premier de $\overline{\mathbb{Q}}[X_1,\dots,X_n]$ des relations algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les nombres $f_1(\alpha),\dots,f_n(\alpha)$. Soit X_0 une nouvelle indéterminée. On note $\tilde{\mathfrak{P}}\subset\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_0,\dots,X_n]$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha\subset\overline{\mathbb{Q}}[X_0,\dots,X_n]$) l'idéal homogénéisé en $X_1,\dots,X_n$ de $\mathfrak{P}$ (respectivement de $\mathfrak{P}_\alpha$). Rappelons que l'homogénéisé d'un idéal premier est un idéal premier de même rang. Le rang d'un idéal premier $\mathfrak{I}$, qui est parfois également appelé la hauteur de $\mathfrak{I}$, est noté ici $\operatorname{rg}(\mathfrak{I})$. On note également $\dim A$, la dimension de Krull d'un anneau commutatif unitaire A. Comme précédemment, on note $\operatorname{ev}_\alpha:\overline{\mathbb{Q}}[z]\to\overline{\mathbb{Q}}$ l'application d'évaluation en $z=\alpha$.

Avec ces notations, on vérifie que la conclusion du théorème est équivalente à l'égalité

$$\operatorname{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\dots,X_n])=\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha, \tag{3.1}$$

pour tout nombre algébrique non nul α de module suffisamment petit. Comme l'anneau $\overline{\mathbb{Q}}(z)[f_1(z),\dots,f_n(z)]$ est de type fini et intègre, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z)) &= \dim\overline{\mathbb{Q}}(z)[f_1(z),\dots,f_n(z)]\\ &= \dim(\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{P})\\ &= \dim(\overline{\mathbb{Q}}(z)[X_1,\dots,X_n])-\operatorname{rg}(\mathfrak{P})\\ &= \dim\overline{\mathbb{Q}}[X_0,\dots,X_n]-\operatorname{rg}(\tilde{\mathfrak{P}})-1.\end{aligned}$$

De façon totalement similaire, il vient :

$$\operatorname{degtr}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha),\ldots,f_n(\alpha)) = \dim \overline{\mathbb{Q}}[X_0,\ldots,X_n] - \operatorname{rg}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha) - 1.$$

D'après (i), on en déduit que pour tout nombre algébrique α tel que $0<\alpha<\rho$:

$$\operatorname{rg}(\tilde{\mathfrak{P}}) = \operatorname{rg}(\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha). \tag{3.2}$$

Compte tenu de (3.2) et comme $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\ldots,X_n])\subset\tilde{\mathfrak{P}}_\alpha$, il suffit de montrer que, pour tout α suffisamment petit, l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\ldots,X_n])$ est un idéal premier de même rang que $\tilde{\mathfrak{P}}$ pour obtenir (3.1) et conclure.

D'après (ii), l'extension $\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ est régulière, ce qui implique que l'idéal $\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\ldots,X_n])$ est absolument premier (voir [**37**, Theorem 39]). Un résultat de Krull [**18**] implique alors que l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\ldots,X_n])$ est premier pour tout α en dehors d'un ensemble fini. Lorsque l'idéal $\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\ldots,X_n])$ est premier, on peut montrer l'égalité de rang

$$\operatorname{rg}(\mathrm{ev}_\alpha(\tilde{\mathfrak{P}}\cap\overline{\mathbb{Q}}[z,X_0,\ldots,X_n])) = \operatorname{rg}(\tilde{\mathfrak{P}})$$

comme dans [**28**] à l'aide d'un résultat de Hilbert. Cela conclut la démonstration. □

Ainsi, pour obtenir le théorème local, il suffit de disposer du théorème 1.1 de Nishioka et du lemme suivant. C'est pour démontrer un résultat analogue au lemme 3.2 que Philippon a recours à la théorie de Galois aux différences, notamment à l'utilisation des propositions 2.2, 3.2, 3.4 et du lemme 3.5 dans [**32**]. Nous donnons ci-dessous une démonstration très courte de ce résultat qui ne nécessite aucun usage de la théorie de Galois aux différences et simplifie notablement l'exposition donnée dans [**32**].

Lemme 3.2. *Soient $f_1(z),\ldots,f_n(z)\in\overline{\mathbb{Q}}\{z\}$ des fonctions solutions d'un système du type (1.2). Alors l'extension de corps $L:=\overline{\mathbb{Q}}(z)(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ est régulière.*

Démonstration. Comme L est finiment engendré, toute sous-extension $\overline{\mathbb{Q}}(z)\subset L'\subset L$ l'est également. Il s'agit d'un résultat classique (voir par exemple Lang [**19**, Exercise 4, Chap. VIII]). Considérons L' la clôture algébrique de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ dans L. Comme L' est algébrique et finiment engendrée, on en déduit que L' est de degré fini sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, disons d. Soit $f\in L'$. Comme f est dans L, la définition du système (1.2) implique que l'on a également $f(z^{q^l})\in L$ pour tout $l\geqslant 0$. D'autre part, les fonctions $f(z^{q^l})$ sont algébriques puisque $f(z)$ l'est. Ainsi, les fonctions $f(z^{q^l})$, $l\geqslant 0$, sont toutes dans L' qui est de degré d sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et il existe donc une relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f(z),f(z^q),\ldots,f(z^{q^d})$, ce qui revient à dire que $f(z)$ est q-mahlérienne. Comme $f(z)$ est également algébrique, un résultat classique (voir par exemple Nishioka [**30**, Theorem 5.1.7]) implique que $f(z)\in\overline{\mathbb{Q}}(z)$, comme souhaité. □

4. *Version homogène du théorème de Philippon*

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 1.4. Pour démontrer ce résultat, nous allons en fait commencer par prouver le corollaire 1.5 de l'introduction dont l'énoncé est le suivant.

Théorème 4.1. *Soit α, $0<|\alpha|<1$, un point algébrique régulier pour le système (1.2). On a :*

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha),\ldots,f_n(\alpha)) = \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))\right).$$

Nous utiliserons pour la démonstration de ce résultat le lemme d'algèbre linéaire suivant, dont une démonstration est donnée dans [**10**, Lemma 3.1].

LEMME 4.2. *Soient $f_1(z),\dots,f_n(z)$ appartenant à $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ et notons d la dimension de l'espace vectoriel* $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z))$. *Alors, il existe des polynômes $\lambda_{i,j}(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[z]$, $1\leqslant i\leqslant d$, $1\leqslant j\leqslant n$, tels que les vecteurs $(\lambda_{i,1}(z),\dots,\lambda_{i,n}(z))$, $1\leqslant i\leqslant d$ forment une base des $\overline{\mathbb{Q}}[z]$-relations entre $f_1(z),\dots,f_n(z)$, et tels que pour tout $\xi\in\overline{\mathbb{Q}}$ le rang de la matrice*

$$\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{1,n}(\xi)\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{d,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{d,n}(\xi)\end{pmatrix}$$

est égal à d.

Démonstration du théorème 4.1. Nous prouverons tout d'abord le résultat dans le cas où les fonctions sont linéairement indépendantes. Nous montrerons ensuite comment l'on peut, dans le cas général, se ramener à cette première situation.

Supposons dans un premier temps que $\dim\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\dots,f_n(z))=0$, c'est-à-dire que les fonctions $f_1(z),\dots,f_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. On va maintenant raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un n-uplet de nombres algébriques $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, non tous nuls, tel que

$$\sum\lambda_i f_i(\alpha)=0, \tag{4.1}$$

où α, $0<|\alpha|<1$, désigne un point algébrique régulier pour le système mahlérien associé aux fonctions f_i. D'après le théorème 1.2, il existe des polynômes $p_1(z),\dots,p_n(z),r(z)\in\overline{\mathbb{Q}}[z]$, premiers entre eux, tels que

$$\sum_{i=1}^n p_i(z)f_i(z)=r(z), \tag{4.2}$$

$p_i(\alpha)=\lambda_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, et $r(\alpha)=0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $r(\alpha^q)\neq 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, il est toujours possible de considérer le plus petit entier l tel que $r(\alpha^{q^{l+1}})\neq 0$. L'équation de dépendance affine (4.2) induit alors une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{i=1}^n p_i(\alpha^{q^l})f_i(\alpha^{q^l})=0$$

et on applique le raisonnement qui suit à α^{q^l}.

On va construire à présent un nouveau système en remplaçant l'une des fonctions f_i par r. Il existe un indice i pour lequel $p_i(\alpha^q)$ est non nul. En effet, si $p_i(\alpha^q)=0$ pour chaque i, comme les fonctions f_i sont toutes définies en α^q car α est un point régulier, on obtiendrait que $r(\alpha^q)=0$, ce qui serait contraire à notre hypothèse. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $p_n(\alpha^q)\neq 0$. On considère alors la matrice suivante :

$$S(z):=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ p_1(z) & p_2(z) & \cdots & p_n(z)\end{pmatrix}$$

de sorte que

$$S(z)\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z) \\ f_n(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z) \\ r(z)\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Notons que la matrice $S(z)$ n'a pas de pôle et a pour déterminant le polynôme $p_n(z)$. Par construction, le vecteur $(f_1(z),\ldots,f_{n-1}(z),r(z))^T$ est solution du système associé à la matrice

$$B(z) := S(z)A(z)S(z^q)^{-1}.$$

Notons que B est bien définie en α. On a par ailleurs, l'égalité suivante pour les déterminants :

$$\det(B(z)) := \det(S(z))\det(A(z))\det(S(z^q))^{-1} = \det(A(z))\frac{p_n(z)}{p_n(z^q)}\cdot \tag{4.4}$$

Comme par hypothèse, les fonctions $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et que la matrice $B(z)$ est inversible, on obtient que les fonctions $f_1(z^q),\ldots,f_{n-1}(z^q)$ et $r(z^q)$ sont également linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Ainsi, la seule relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ liant $r(z)$ et $f_1(z^q),\ldots,f_{n-1}(z^q),r(z^q)$ est, à multiplication par une constante près, la relation banale :

$$r(z) = \frac{r(z)}{r(z^q)}r(z^q)\cdot$$

On en déduit que la n-ième ligne de la matrice $B(z)$ est, à multiplication par une constante près, égale à :

$$\left(0,\ldots,0,\frac{r(z)}{r(z^q)}\right).$$

Puisque $r(\alpha)=0$ et, par hypothèse, $r(\alpha^q)\neq 0$, on obtient que

$$(0,\ldots,0,1)B(\alpha) = 0.$$

Cependant, on a

$$\begin{aligned}(0,\ldots,0,1)B(\alpha) &= (0,\ldots,0,1)S(\alpha)A(\alpha)S(\alpha^q)^{-1} \\ &= (p_1(\alpha),\ldots,p_n(\alpha))A(\alpha)S(\alpha^q)^{-1} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

car la matrice $A(\alpha)S(\alpha^q)^{-1}$ est inversible et que les $p_i(\alpha)$ ne sont pas tous nuls. On obtient donc une contradiction, ce qui prouve le théorème dans le cas où $\dim \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z)) = 0$.

Supposons à présent que $\dim \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z)) = d \geqslant 1$. D'après le lemme 4.2, on peut choisir une famille de vecteurs

$$\boldsymbol{\lambda}_i(z) := (\lambda_{i,1}(z),\ldots,\lambda_{i,n}(z)),\ \ 1\leqslant i\leqslant d,$$

dont les coordonnées sont dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$ et tels que le rang de la matrice

$$M(\xi) := \begin{pmatrix}\lambda_{1,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{1,n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(\xi) & \cdots & \lambda_{d,n}(\xi)\end{pmatrix}$$

est égal à d pour tout ξ dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Quitte à renuméroter les fonctions f_i, on peut donc supposer que le mineur principal de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(\alpha) & \cdots & \lambda_{1,n}(\alpha) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(\alpha) & \cdots & \lambda_{d,n}(\alpha) \end{pmatrix}$$

est inversible. On considère alors la matrice suivante

$$S(z) := \begin{pmatrix} \lambda_{1,1}(z) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{1,n}(z) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \lambda_{d,1}(z) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{d,n}(z) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est donc définie et inversible en $z = \alpha$. D'autre part, on a

$$S(z) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Fixons un entier l_0 tel que le déterminant de $S(z)$ ne s'annule en aucun des points α^{q^l}, pour $l \geqslant l_0$, et notons $q_0 = q^{l_0}$. Considérons enfin la matrice

$$B(z) = S(z)A(z)S(z^{q_0})^{-1}.$$

On a l'équation malhérienne suivante

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{d+1}(z^{q_0}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q_0}) \end{pmatrix}$$

pour laquelle le point α est un point régulier. D'autre part, l'indépendance linéaire des fonctions $f_{d+1}(z), \ldots, f_n(z)$ nous garantit que la matrice $B(z)$ est triangulaire inférieure, de la forme suivante

$$B(z) = \left(\begin{array}{c|c} D(z) & 0 \\ \hline E(z) & C(z) \end{array}\right)$$

où $C(z)$ est une matrice carrée de taille $n-d$. On considère alors le sous-système

$$\begin{pmatrix} f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} f_{d+1}(z^{q_0}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q_0}) \end{pmatrix}.$$

Le point α est encore régulier pour ce système. En effet, par construction, pour tout entiel $l \geqslant 1$, $\alpha^{q_0^l}$ n'est pôle d'aucun des coefficients de $B(z)$ et donc *a fortiori* d'aucun des coefficients de $C(z)$. D'autre part

$$\det B(z) = \det C(z) \det D(z),$$

et $\alpha^{q_0^l}$ n'étant ni un zéro de $\det B(z)$, ni un pôle de $\det D(z)$, $\alpha^{q_0^l}$ n'est pas un zéro de $\det C(z)$. Considérons maintenant un vecteur

$$\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)).$$

La matrice $S(z)$ étant inversible en $z = \alpha$, on peut considérer le vecteur $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\lambda} S(\alpha)^{-1}$. D'après (4.5), on obtient que $\boldsymbol{\mu}$ appartient à l'ensemble

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(0, \ldots, 0, f_{d+1}(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)).$$

Notons $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, de sorte que

$$(\mu_{d+1}, \ldots, \mu_n) \in \mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_{d+1}(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)).$$

Par hypothèse, le système

$$\begin{pmatrix} f_{d+1}(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = C(z) \begin{pmatrix} f_{d+1}(z^{q_0}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q_0}) \end{pmatrix}$$

est formé de fonctions linéairement indépendantes et admet α comme point régulier. La premiére partie de la preuve montre donc que

$$\mu_{d+1} = \cdots = \mu_n = 0.$$

En posant

$$\tilde{S}(z) := S(z) - \left(\begin{array}{c|c} 0_{d \times d} & 0_{d \times (n-d)} \\ \hline 0_{(n-d) \times d} & \mathrm{I}_{n-d} \end{array}\right),$$

on obtient alors

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} S(\alpha) = \boldsymbol{\mu} \tilde{S}(\alpha). \tag{4.6}$$

Par construction, chaque ligne de la matrice $\tilde{S}(z)$ appartient à l'espace vectoriel $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ et donc le vecteur $\boldsymbol{\mu}\tilde{S}(z)$ appartient à $\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z))$. On déduit donc de (4.6) que

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{ev}_\alpha \left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z)) \right),$$

ce qui achève cette démonstration. □

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème 1.4.

Preuve du théorème 1.4. Soient α, $0 < |\alpha| < 1$, un point algébrique régulier pour le système (1.2) et $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène de degré $d \geqslant 1$ en les variables $X_1, \ldots, X_n$ tel que

$$P(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)) = 0.$$

Notons $M_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, M_N(X_1, \ldots, X_n)$ une énumération des monômes de degré d en les variables $X_1, \ldots, X_n$. On considère alors les fonctions $g_1(z) := M_1(f_1(z), \ldots, f_n(z)), \ldots, g_N(z) := M_N(f_1(z), \ldots, f_n(z))$. Celles-ci sont solutions du système mahlérien

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_N(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} g_1(z^k) \\ \vdots \\ g_N(z^k) \end{pmatrix},$$

où $B(z)$ est une sous-matrice de $A(z)^{\oplus d}$, puissance d-ième de Hadamard de la matrice $A(z)$. En particulier les racines du déterminant de $B(z)$ sont celles de celui de $A(z)$ et les pôles des coefficients de $B(z)$ sont ceux des coefficients de $A(z)$. Le point α est donc un point régulier pour ce système. En appliquant le théorème 4.1 à ce système, on obtient l'existence de polynômes $v_1(z), \ldots, v_N(z)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} v_i(z) g_i(z) = 0 \qquad \text{et } P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{N} v_i(\alpha) M_i(X_1, \ldots, X_n).$$

On pose alors $Q(z, X_1, \ldots, X_n) := \sum_{i=1}^{n} v_i(z) M_i(X_1, \ldots, X_n)$, ce qui termine la démonstration. □

5. *Première démonstration du point* (i) *du théorème* 1.7

Nous allons montrer comment obtenir le point (i) du théorème 1.7 à partir du théorème 1.2 de Philippon. Pour cela, nous aurons besoin de trois résultats auxiliaires.

Le lemme suivant est une adaptation directe d'une construction utilisée par Bell, Bugeaud et Coons dans [**9**]. Elle permet, étant donné un nombre algébrique α non nul, de plonger un système mahlérien dont les solutions sont définies au point α dans un méta-système pour lequel les points α^{q^l}, $l \geqslant 0$, ne sont jamais des pôles des coefficients de la matrice associée. Notons que cette astuce s'avère inutile dans le cas des séries automatiques (ou même régulières) puisque l'on peut alors se ramener à un système mahlérien dont la matrice est à coefficients polynômes.

Lemme 5.1. *Considérons un système du type* (1.2) *et* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ *qui ne soit pôle d'aucune des fonctions* $f_1(z), \ldots, f_n(z)$. *Soit* $\mathbf{k}$ *un corps de nombres contenant les coefficients des* $f_i(z)$ *et* α. *Alors, il existe un système mahlérien d'ordre* $m \geqslant n$, *ayant pour solution des fonctions* $g_1(z), \ldots, g_m(z)$ *et tel que :*

(i) *la matrice* $B(z)$ *associée à ce nouveau système n'a de pôle en aucun des points* α^{q^l}, *pour tout entier* l,

(ii) $g_i(\alpha) = \lambda_i f_i(\alpha)$, *où* $\lambda_i \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$, *pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration. Notons $A_0(z)$ la matrice associée à notre système. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il existe un entier l tel que la matrice $A_0(z)$ ne soit pas définie au point α^{q^l}. En effet, si ce n'est pas le cas, le système de départ jouit déjà des propriétés requises. Notons $b(z)$ le polynôme obtenu comme ppcm des dénominateurs des coefficients de la matrice $A_0(z)$. On a alors $A_0(z) = A(z)/b(z)$ pour une matrice $A(z)$ dont les coefficients sont des éléments de $\mathbf{k}[z]$. Notons qu'il existe un entier n_0 tel que

$$b(\alpha^{q^l}) \neq 0 \tag{5.1}$$

pour tout $l \geqslant n_0$. D'autre part, on peut écrire $b(z) = \gamma z^r \beta(z)$ où r est un entier, γ est un élément de $\mathbf{k}$ et $\beta(z)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{k}$ tel que $\beta(0) = 1$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on pose :

$$h_i(z) := f_i(z) \prod_{j \geqslant 0} \beta(z^{q^j}).$$

Les fonctions $h_1(z), \ldots, h_n(z)$ sont ainsi solutions du système mahlérien associé à la matrice $A(z)/\gamma z^r$. En dérivant, on obtient un nouveau système de la forme

$$\begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_n(z) \\ h_1'(z) \\ \vdots \\ h_n'(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma z^r} \begin{pmatrix} A(z) & 0 \\ \star & qz^{q-1}A(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(z^q) \\ \vdots \\ h_n(z^q) \\ h_1'(z^q) \\ \vdots \\ h_n'(z^q) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

où $\star$ désigne une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$. En itérant ce procédé t fois, on obtient un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_n(z) \\ h_1'(z) \\ \vdots \\ h_n'(z) \\ \vdots \\ h_1^{(t)}(z) \\ \vdots \\ h_n^{(t)}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma z^r} \begin{pmatrix} A(z) & & & \\ \star & qz^{q-1}A(z) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \star & \ldots & \star & q^t z^{t(q-1)}A(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(z^q) \\ \vdots \\ h_n(z^q) \\ h_1'(z^q) \\ \vdots \\ h_n'(z^q) \\ \vdots \\ h_1^{(t)}(z^q) \\ \vdots \\ h_n^{(t)}(z^q) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Notons s l'ordre de la racine α dans le polynôme $\prod_{j=0}^{n_0-1} \beta(z^{q^j})$ et $T(z)$ le polynôme à coefficients dans $\mathbf{k}$ défini par l'égalité

$$\prod_{j=0}^{n_0-1} \beta(z^{k^j}) = (z-\alpha)^s T(z).$$

Notons que $T(\alpha) \neq 0$. Un calcul montre alors que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$f_i(\alpha) s! T(\alpha) = \frac{h_i^{(s)}(\alpha)}{\prod_{j \geqslant n_0} \beta(\alpha^{q^j})} \cdot \tag{5.4}$$

D'autre part, on peut vérifier que les fonctions

$$h_{i,j}(z) := \frac{h_i^{(j)}(z)}{\prod_{l \geqslant n_0} \beta(z^{q^l})}, \; i = 1, \ldots, n, j = 0, \ldots, s,$$

satisfont à un système mahlérien d'ordre $m := n(s+1)$ associé à la matrice

$$B(z) := \frac{1}{\gamma z^r \beta(z^{q^{n_0}})} \begin{pmatrix} A(z) & & & \\ \star & qz^{q-1}A(z) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \star & \dots & \star & q^s z^{s(q-1)}A(z) \end{pmatrix}.$$

Au vu de (5.1) et (5.4), et puisque les $\star$ désignent des sous-matrices à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$, ce système a toutes les propriétés requises en posant $g_{al+i}(z) := h_{i,s-a}(z)$ pour $a = 0, \dots, s$ et $i = 1, \dots, n$. □

Le lemme suivant est la conséquence d'une autre construction permettant de plonger un système mahlérien pour lequel un point α est singulier (mais tel que α^{q^l} n'est jamais un pôle de la matrice associée) dans un méta-système pour lequel α est un point régulier.

LEMME 5.2. *Considérons un système du type (1.2) et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ qui ne soit pôle d'aucune des fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$. Supposons en outre que, pour tout entier l, α^{q^l} ne soit pas un pôle de la matrice $A(z)$. Alors, il existe un système mahlérien d'ordre $m \geqslant n$, admettant des solutions $h_1(z), \dots, h_m(z)$, et tel que:*

(i) *α est un point régulier pour ce système,*
(ii) *$h_i(z) = f_i(z)$ pour $i = 1 \dots, n$.*

Démonstration. Plaçons-nous dans les conditions du théorème et supposons que le point α est singulier (mais tel que la matrice $A(z)$ associée soit définie en tout point de la forme α^{q^l}, comme le permet l'hypothèse). L'idée est alors de « dédoubler le système » en remarquant que les $2n$ fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z), f_1(z^q), \dots, f_n(z^q)$ satisfont à la relation

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \\ f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix} = B_1(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \\ f_1(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^2}) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

où $B_1(z)$ est donné par la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A(z) - I_n & A(z^q) \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

Notons d'abord que par hypothèse la matrice $B_1(z)$ est bien définie en tout point de la forme α^{q^l}. Ainsi, si α est singulier, cela signifie nécessairement qu'il existe un entier l tel que $\det B_1(\alpha^{q^l}) = 0$. D'autre part, on a $\det B_1(z) = \det A(z^q)$. Comme les racines de $\det B_1(z)$ sont en nombre fini, il existe un entier n_0 tel que $\det B_1(\alpha^{q^l}) \neq 0$ pour tout $l \geqslant n_0$. En itérant n_0 fois la méthode de dédoublement, on obtient un système du type:

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \\ f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{n_0}}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^{n_0}}) \end{pmatrix} = B_{n_0}(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \\ f_1(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^2}) \\ \vdots \\ f_1(z^{q^{n_0+1}}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^{n_0+1}}) \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

où $B_{n_0}(z) \in \mathrm{GL}_{n2^{n_0}}(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ est définie récursivement par :

$$B_j(z) := \left(\begin{array}{c|c} B_{j-1}(z) - I_{n2^{j-1}} & B_{j-1}(z^q) \\ \hline I_{n2^{j-1}} & 0 \end{array} \right)$$

et $B_0(z) := A(z)$. On obtient donc que $\det B_{n_0}(z) = \det B_0(z^{q^{n_0}})$, ce qui implique que le point α est régulier pour le système associé à la matrice $B_{n_0}(z)$. En posant $m = n2^{n_0}$ et $h_{an+i}(z) := f_i(z^{q^a})$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $a = 0, \ldots, 2n_0$, on obtient le résultat souhaité. $\square$

Nous aurons également besoin du lemme de descente suivant.

Lemme 5.3. *Soient $h_1(z), \ldots, h_n(z)$ des fonctions analytiques dans un voisinage de l'origine et à coefficients dans un corps de nombres $\mathbf{k}$. Soit $\alpha \in \mathbf{k}$ dans le domaine de convergence de ces fonctions. Supposons qu'il existe $w_1(z), \ldots, w_n(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, non tous nuls, tels que*

$$w_1(z)h_1(z) + \cdots + w_n(z)h_n(z) = 0, \tag{5.7}$$

avec $w_i(\alpha) = 0$ pour tout i dans un ensemble $\mathcal{I}$ et $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$ pour un certain indice $i_0 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{I}$. Alors il existe $w'_1(z), \ldots, w'_n(z) \in \mathbf{k}[z]$, non tous nuls, tels que

$$w'_1(z)h_1(z) + \cdots + w'_n(z)h_n(z) = 0,$$

avec $w'_i(\alpha) = 0$ pour tout i dans $\mathcal{I}$ et $w'_{i_0}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. Les polynômes $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ étant en nombre fini et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, leurs coefficients engendrent une extension de corps de degré fini, disons h, sur $\mathbf{k}$. Notons $\mathbf{k}_0 \subset \mathbb{C}$ une telle extension et m le maximum des degrés des $w_i(z)$. Soit φ tel que $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}(\varphi)$. Chaque polynôme $w_i(z)$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$w_i(z) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{h-1} \lambda(i,k,l)\varphi^l \right) z^k,$$

où les coefficients $\lambda(i,k,l)$ sont tous dans $\mathbf{k}$.

Soit i_0 comme dans l'énoncé. Comme $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$ et que $1, \varphi, \ldots, \varphi^{h-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$, il existe un indice l_0 tel que

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda(i_0,k,l_0)\alpha^k \neq 0. \tag{5.8}$$

La relation (5.7) donne une relation de dépendance linéaire sur $\mathbf{k}_0$ entre les fonctions $z^k h_i(z)$, $k = 0, 1, \ldots m$, $i = 1, \ldots, n$, à savoir :

$$\sum_{l=0}^{h-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda(i,k,l) z^k h_i(z) \right) \varphi^l = 0.$$

Comme l'indéterminée z est transcendante sur $\mathbb{C}$ et que les coefficients des $h_i(z)$ sont des éléments de $\mathbf{k}$, on en déduit que pour tout l :

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda(i,k,l) z^k h_i(z) = 0.$$

On obtient notamment la relation de dépendance linéaire suivante sur $\mathbf{k}[z]$ entre les $h_i(z)$:

$$w_1'(z)h_1(z) + \cdots + w_n'(z)h_n(z) = 0,$$

où $w_i'(z) := \sum_{k=0}^{m} \lambda(i,k,l_0) z^k \in \mathbf{k}[z]$. Notons que d'après (5.8), $w_{i_0}'(\alpha) \neq 0$. Cela implique au passage que $w_{i_0}'(z) \neq 0$ et donc que la relation est non triviale.

Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à vérifier que $w_i'(\alpha) = 0$ pour $i \in \mathcal{I}$. Pour un tel i, nous savons que $w_i(\alpha) = 0$, ce qui signifie que

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{h-1} \lambda(i,k,l) \varphi^l \right) \alpha^k = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{l=0}^{h-1} \left(\sum_{k=0}^{m} \lambda(i,k,l) \alpha^k \right) \varphi^l = 0.$$

Comme $\alpha \in \mathbf{k}$, on obtient que pour tout l :

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda(i,k,l) \alpha^k = 0.$$

Le choix $l = l_0$ donne l'égalité $w_i'(\alpha) = 0$, ce qui conclut la démonstration. □

Nous pouvons à présent démontrer le point (i) du théorème 1.7.

Démonstration du point (i) *du théorème* 1.7. Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ des fonctions q-mahlériennes. Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre qui n'est pôle d'aucune de ces fonctions et $\mathbf{k}$ un corps de nombres contenant α ainsi que les coefficients des f_i.

Comme les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont q-mahlériennes, on peut trouver un système du type (1.2) d'ordre $m_0 \geqslant n$, associé à une matrice $B(z)$, et admettant des solutions $f_1(z), \ldots, f_{m_0}(z)$ où, pour $i = n+1, \ldots, m_0$, les fonctions $f_i(z)$ sont de nouvelles fonctions q-mahlériennes, toutes définies en α. En utilisant le Lemme 5.1, on obtient un méta-système mahlérien, disons d'ordre $m_1 \geqslant m_0$, pour lequel aucun des α^{q^l} n'est pôle d'un des coefficients de la matrice $B_1(z)$ associée à ce système. Notons que ce changement de système conduit à remplacer les fonctions $f_1(z), \ldots, f_{m_0}(z)$ par des fonctions $g_1(z), \ldots, g_{m_1}(z)$ telles que, pour tout $i = 1, \ldots, m_0$, on ait $g_i(\alpha) = \lambda_i f_i(\alpha)$ avec $\lambda_i \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$, $\lambda_i \neq 0$. Une fois cette première étape réalisée, on utilise le Lemme 5.2. Il nous permet d'obtenir un système mahlérien encore plus gros, disons d'ordre $m_2 \geqslant m_1$, pour lequel le point α est régulier et dont les solutions $h_1(z), \ldots, h_{m_2}(z)$ vérifient $h_i(z) = g_i(z)$ pour $i = 1 \ldots, m_1$. Comme les λ_i sont tous non nuls et dans $\mathbf{k}$, la dépendance linéaire sur $\mathbf{k}$ (ou sur $\overline{\mathbb{Q}}$) des $f_i(\alpha)$ est équivalente à celle des $g_i(\alpha)$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $f_i(z) = g_i(z)$ pour $i = 1, \ldots, m_0$.

En résumé, nous pouvons donc supposer sans perte de généralité qu'il existe un système mahlérien, disons d'ordre $m \geqslant n$, dont les solutions $h_1(z), \dots, h_m(z)$ vérifient $h_i(z) = f_i(z)$ pour $i = 1, \dots, n$ et tel que α est un point régulier pour ce système. Supposons à présent qu'il existe $w_1, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, non tous nuls, tels que

$$w_1 f_1(\alpha) + \cdots + w_n f_n(\alpha) = 0.$$

En appliquant le théorème 1.2 à notre système, on obtient l'existence de polynômes $w_0(z), \dots, w_m(z)$, non tous nuls et appartenant à $\mathbb{C}[z]$, tels que

$$w_0(z) + w_1(z)h_1(z) + \cdots + w_m(z)h_m(z) = 0,$$

avec $w_i(\alpha) = w_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $w_i(\alpha) = 0$ pour $i = n+1, \dots, m$ et $i = 0$. Puisque les w_i sont non tous nuls, on peut choisir un indice i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, tel que $w_{i_0}(\alpha) \neq 0$. Le Lemme 5.3 nous donne alors l'existence de polynômes $w'_0(z), \dots, w'_m(z)$, non tous nuls et appartenant à $\mathbf{k}[z]$, tels que

$$w'_0(z) + w'_1(z)h_1(z) + \cdots + w'_m(z)h_m(z) = 0,$$

où $w'_i(\alpha) = 0$ pour $i = n+1, \dots, m$ et $i = 0$, et $w'_{i_0}(\alpha) \neq 0$. En spécialisant au point α, il vient :

$$w'_1(\alpha)f_1(\alpha) + \cdots + w'_n(\alpha)f_n(\alpha) = 0. \tag{5.9}$$

Puisque les $w'_i(z)$ sont à coefficients dans $\mathbf{k}$ et que $\alpha \in \mathbf{k}$, on a $w'_i(\alpha) \in \mathbf{k}$ pour tout i. Comme $w'_{i_0}(\alpha) \neq 0$, la relation (5.9) est non triviale et les nombres $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ sont donc linéairement dépendants sur $\mathbf{k}$, ce qui termine la démonstration. □

6. *Démonstrations des théorèmes* 1.7, 1.9 *et* 1.10

Dans cette partie, nous utilisons la version homogène du théorème de Philippon, à savoir le théorème 1.4, pour en déduire les théorèmes 1.10, 1.9, puis 1.7.

Preuve du Théorème 1.10. Fixons un entier l comme donné dans l'énoncé. On a

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^l}) \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

et l'hypothèse faite sur l assure que le point α^{q^l} est régulier pour ce système. Dans la suite, quitte à remplacer q par q^l et A par A_l, on supposera que $l = 1$, et donc que α^q est un point régulier pour le système de départ.

Notons d l'ordre maximal des pôles des coefficients de la matrice $A(z)$ au point α. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier d.

Si $d = 0$, alors α n'est pas un pôle de $A(z)$ et il n'y a rien à faire.

On suppose à présent que la propriété est vraie jusqu'à l'entier $d-1$ et que α est un pôle d'ordre $d \geqslant 1$ pour $A(z)$. Notons que chaque coefficient de $A(z)$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)(z-\alpha)^k},$$

où P et Q sont des polynômes, $Q(\alpha)P(\alpha) \neq 0$ et $k \leqslant d$. À multiplication par une constante près, les polynômes P et Q sont uniques. En notant $T(z)$ le plus petit commun multiple de ces polynômes Q, on peut décomposer la matrice $A(z)$ de la manière suivante :

$$A(z) = T(z)^{-1}\left(A_0(z) + \frac{A_1}{z-\alpha} + \cdots + \frac{A_d}{(z-\alpha)^d}\right), \tag{6.2}$$

où $A_0(z)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$ et où les A_i, $i=1,\ldots,d$, sont des matrices à coefficients dans $\mathbf{k}$ et $A_d \neq 0$. En multipliant la relation (6.1) par $(z-\alpha)^d$ et en évaluant en α, on trouve

$$A_d \begin{pmatrix} f_1(\alpha^q) \\ \vdots \\ f_n(\alpha^q) \end{pmatrix} = 0, \tag{6.3}$$

puisque les fonctions f_i sont toutes définies en α. Comme α^q est un point régulier pour le système mahlérien associé à $A(z)$, le théorème 1.4 implique l'existence d'une matrice $C(z)$, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, telle que

$$C(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{et} \quad C(\alpha) = A_d. \tag{6.4}$$

L'argument de descente déjà utilisé dans la démonstration du lemme 5.3 montre alors que l'on peut en fait choisir $C(z)$ à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$. On peut donc écrire

$$A_d = C(z) + (z-\alpha)D(z),$$

où $D(z)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$. Posons alors

$$B_0(z) := A(z) - T(z)^{-1}\frac{C(z)}{(z-\alpha)^d}.$$

Pour $B_0(z)$, α est un pôle d'ordre $d-1$, et on a

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = B_0(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix}.$$

Pour l'instant, rien ne garantit que la matrice $B_0(z)$ est régulière en α^q, ni même qu'elle est inversible. On montre à présent que l'on peut modifier légèrement la matrice $B_0(z)$ pour que ce soit le cas. Par hypothèse la matrice $A(z)$ est inversible sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$. Le déterminant de cette matrice est ainsi une fraction rationnelle ne s'annulant pas sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$. Il existe donc un entier N_0 tel que toute matrice E de $\mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ pour laquelle il existe $\xi \in D(0,\rho)^\star$ tel que

$$\|A(\xi) - E\| < |\xi|^{N_0},$$

est inversible, où $\|\cdot\|$ désigne la norme infini. D'autre part, la matrice $C(z)$ est à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$. Il existe donc un entier M tel que

$$\|C(\xi)\| < M$$

pour tout $\xi \in \overline{D(0,\rho)}$. On s'intéresse maintenant au développement en série de Laurent de la fraction rationnelle $(T(z)(z-\alpha)^d)^{-1}$

$$\frac{1}{T(z)(z-\alpha)^d} = \sum_{l=-r}^{\infty} c_l z^l.$$

La série $z^{-N_0}\sum_{l \geqslant N_0} c_l z^l$ converge absolument sur le compact $\overline{D(0,\rho)}$. Il existe donc un entier $N_1 \geqslant N_0$ tel que, pour tout $\xi \in \overline{D(0,\rho)}$,

$$\left| z^{-N_0} \sum_{l \geqslant N_1} c_l z^l \right| < \frac{1}{M}.$$

Notons alors

$$Q(z) := \sum_{l=-r}^{N_1-1} c_l z^l \in \mathbf{k}[z, z^{-1}]$$

et posons

$$B_1(z) := B_0(z) + Q(z)C(z) = A(z) + \left(Q(z) - \frac{1}{T(z)(z-\alpha)^d}\right) C(z).$$

Par construction on a, pour tout $\xi \in D(0,\rho)^\star$,

$$\begin{aligned} \|B_1(\xi) - A(\xi)\| &\leqslant \left\| \left(Q(\xi) - \frac{1}{T(\xi)(\xi-\alpha)^d}\right) C(\xi) \right\| \\ &\leqslant \left| \sum_{l \geqslant N_1} c_l \xi^l \right| \times \|C(\xi)\| \\ &< |\xi|^{N_0} \end{aligned}$$

La matrice B_1 est donc inversible sur le disque épointé $D(0,\rho)^\star$. Par construction de la matrice $C(z)$, la matrice $B_1(z)$ satisfait elle aussi le système

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = B_1(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_n(z^q) \end{pmatrix},$$

et le point α^q est régulier pour ce système. Enfin, α est un pôle d'ordre au maximum $d-1$, pour la matrice $B_1(z)$, comme souhaité.

Notons que cette démonstration fournit une méthode permettant de déterminer une telle matrice $B_1(z)$. En effet, le théorème 7.1 permet de calculer une matrice $C(z)$ comme en (6.4). Il suffit ensuite de déterminer de façon explicite un entier N_1 convenable afin d'en déduire $B_1(z)$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à ce système, on obtient l'existence d'une matrice $B(z)$ satisfaisant aux propriétés voulues. Cela conclut la démonstration de la première partie du théorème.

Supposons à présent que les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}(z)$. D'après ce que l'on vient de démontrer, on peut trouver une matrice $B(z)$ de sorte que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^l}) \end{pmatrix}$$

et que α ne soit pas un pôle de $B(z)$. D'autre part, on a également :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = A_l(z) \begin{pmatrix} f_1(z^{q^l}) \\ \vdots \\ f_n(z^{q^l}) \end{pmatrix}.$$

Par différence, on obtient donc

$$\left(B(z)^{-1} - A_l(z)^{-1}\right) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = 0.$$

Les fonctions $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ étant linéairement indépendantes sur $\mathbf{k}(z)$, cela implique que

$$A_l(z) = B(z),$$

comme voulu. $\square$

REMARQUE 6.1. Notons *a contrario* que si les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{k}(z)$, on peut toujours les obtenir comme solution d'un système mahlérien ayant un pôle au point α. En effet, la dépendance linéaire des fonctions f_i implique l'existence d'une matrice non nulle $C(z)$ telle que

$$C(z)\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = 0.$$

Les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont alors solutions du système mahlérien associé à la matrice

$$B(z) := A(z) + \frac{1}{(z-\alpha)^r} C(z).$$

En choisissant l'entier r assez grand, on peut toujours garantir que $B(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{k}(z))$ et que α est un pôle de $B(z)$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.9.

Preuve du Théorème 1.9. Soit α un nombre algébrique non nul et l un entier tel que $|\alpha^{q^l}| < \rho$. Supposons que α n'est pas un pôle de $A_l(z)$. Rappelons que notre objectif est de montrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)) = \ker_{\mathbf{k}} A_l(\alpha) + \mathrm{ev}_\alpha \left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z))\right). \tag{6.5}$$

Notons tout d'abord que l'inclusion $\supset$ est banale. Pour démontrer l'inclusion inverse, fixons $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))$. Posons également $\mathbf{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_n(z))^T$. En itérant le système mahlérien, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\alpha) \\ &= \boldsymbol{\lambda}\mathbf{f}(\alpha) \\ &= \boldsymbol{\lambda} A_l(\alpha)\mathbf{f}(\alpha^{q^l}). \end{aligned}$$

Le point α^{q^l} étant par hypothèse régulier, le théorème 1.4 implique que

$$\boldsymbol{\lambda} A_l(\alpha) \in \mathrm{ev}_{\alpha^{q^l}} \left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z))\right). \tag{6.6}$$

Nous allons montrer l'inclusion d'espaces vectoriels suivante :

$$\mathrm{ev}_{\alpha^{q^l}} \left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z))\right) \subset \mathrm{ev}_\alpha \left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z))\right) A_l(\alpha). \tag{6.7}$$

En effet, si $\mathbf{v}(z) = (v_1(z), \ldots, v_n(z)) \in \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z))$, alors, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n v_i(z^{q^l}) f_i(z^{q^l}) \\ &= \mathbf{v}(z^{q^l})\mathbf{f}(z^{q^l}) \\ &= \mathbf{v}(z^{q^l}) A_l(z)^{-1}\mathbf{f}(z). \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{v}(z^{q^l})A_l(z)^{-1} \in \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z))$, ou encore que

$$\mathbf{v}(z^{q^l}) \in \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z))A_l(z).$$

En évaluant en α, il vient

$$\mathbf{v}(\alpha^{q^l}) = \mathrm{ev}_\alpha(\mathbf{v}(z^{q^l})) \in \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z))\right) A_l(\alpha),$$

ce qui montre l'inclusion (6.7).

En combinant (6.6) et (6.7), on trouve l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{ev}_\alpha(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z)))$ tel que

$$\boldsymbol{\lambda} A_l(\alpha) = \boldsymbol{\mu} A_l(\alpha).$$

Ainsi, on obtient bien le résultat souhaité, à savoir : $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\mu}$, où $(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}) \in \ker_{\mathbf{k}} A_l(\alpha)$ et $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{ev}_\alpha(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(\mathbf{f}(z)))$. □

Nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème 1.7.

Démonstration du théorème 1.7. Comme les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont q-mahlériennes, on peut trouver un entier $m \geqslant n$, des fonctions $f_{n+1}(z), \ldots, f_m(z)$ et une matrice $A(z) \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{k}(z))$ tels que

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_m(z^q) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 1.10, quitte à changer q en q^l et à modifier la matrice $A(z)$, on peut supposer que α n'est pas un pôle de $A(z)$ et que α^q est un point régulier pour ce système. Étant donné un corps $\mathbf{k}_0$, on note

$$E_{\mathbf{k}_0} := \{(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbf{k}_0^m \mid w_{n+1} = \cdots = w_m = 0\}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, (\alpha), \ldots, f_n(\alpha)) = \pi\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, (\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) \cap E_{\overline{\mathbb{Q}}}\right) \tag{6.8}$$

où π désigne la projection des n premières coordonnées de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^n$. Le théorème 1.9 implique alors l'égalité suivante :

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, (\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = \ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A(\alpha) + \mathrm{ev}_\alpha\left(\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)\right).$$

Comme la matrice $A(z)$ est à coefficients dans $\mathbf{k}(z)$, on a :

$$\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A(\alpha) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\ker_{\mathbf{k}} A(\alpha)\right).$$

D'autre part, les fonctions f_i étant à coefficients dans $\mathbf{k}$, on a également que :

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(f_1(z), \ldots, f_m(z)) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z))\right).$$

Enfin, on a $E_{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\mathbf{k}}$. On a donc

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}(f_1, (\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) \cap E_{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}\left(f_1, (\alpha), \ldots, f_m(\alpha)\right) \cap E_{\mathbf{k}}\right)$$

et l'égalité (6.8) entraine alors que

$$\mathrm{Rel}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(f_1, (\alpha), \ldots, f_n(\alpha)\right) = \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}}(f_1, (\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\right),$$

comme souhaité. □

7. *Relations linéaires entre solutions d'un système mahlérien*

Dans cette section, nous étudions les relations fonctionnelles de dépendance linéaire entre les solutions d'un système mahlérien.

Fixons, pour toute cette section, les notations suivantes. Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres et $f_1(z), \ldots, f_n(z) \in \mathbf{k}\{z\}$ des solutions d'un système mahlérien du type (1.2). On notera également de la même façon $\mathbf{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_n(z))^T \in \mathbf{k}\{z\}^n$ et $\mathbf{f}(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{f}_i z^i \in \mathbf{k}^n\{z\}$, où $\mathbf{f}_i$ désigne le vecteur colonne de $\mathbf{k}^n$ dont les coordonnées correspondent aux i-èmes coefficients des fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$. On rappelle que $\mathbf{k}[z]_h$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{k}$ de degré au plus h. On notera aussi

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z), \ldots, f_n(z)) = (\mathbf{k}[z]_h)^n \cap \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z)),$$

le $\mathbf{k}$-espace vectoriel des relations linéaires polynomiales de hauteur inférieure ou égale à h. Étant donnés deux entiers h et M, on définit la matrice

$$\mathcal{S}(h, M, \mathbf{f}) := \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 & \mathbf{f}_1 & \cdots & \mathbf{f}_h & \cdots & \mathbf{f}_M \\ 0 & \mathbf{f}_0 & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{f}_{M-1} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{f}_0 & \cdots & \mathbf{f}_{M-h} \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\ker_{\mathbf{k}} \mathcal{S}(h, M, \mathbf{f}) := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in (\mathbf{k}^n)^{h+1} \mid \boldsymbol{\lambda} \mathcal{S}(h, M, \mathbf{f}) = 0 \right\}.$$

On définit également l'isomorphisme $\varphi_h : (\mathbf{k}^n)^{h+1} \to (\mathbf{k}[z]_h)^n$ par

$$\varphi_h(\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_h) = \sum_{i=0}^{h} \mathbf{w}_i z^i.$$

On omettra la dépendance en h dans la suite, le notant simplement φ. On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME 7.1. *Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres et $f_1(z), \ldots, f_n(z) \in \mathbf{k}\{z\}$ des fonctions solutions d'un système du type (1.2). On note $b(z)$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des coefficients de $A(z)$, d le maximum des degrés des coefficients de la matrice $b(z)A(z)$, et ν la valuation en 0 du polynôme $b(z)$. Soient $h := 4^n d$ et*

$$c := \left\lceil \frac{q^{n((qh+d+1)/(q-1)+q+1)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z)) &= \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z), \ldots f_n(z))\right) \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}(z)}\left(\varphi\left(\ker_{\mathbf{k}} \mathcal{S}(h, c, \mathbf{f})\right)\right). \end{aligned}$$

Déterminer si les fonctions $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont linéairement indépendantes peut se faire de façon plus efficace comme le montre le résultat suivant.

THÉORÈME 7.2. *Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z)$, $b(z)$, $A(z)$, d et ν choisis comme dans le théorème 7.1. Soient $h := \lfloor d/(q-1) \rfloor$ et*

$$c := \left\lceil \frac{q^{n((qh+d+1)/(q-1)+q+1)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil.$$

On a les équivalences suivantes :

(i) $\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \ldots, f_n(z)) \neq \{0\}$,
(ii) $\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z), \ldots, f_n(z)) \neq \{0\}$,
(iii) $\ker_{\mathbf{k}} \mathcal{S}(h, c, \mathbf{f}) \neq \{0\}$.

Le reste de cette section est consacrée aux démonstrations des théorèmes 7.1 et 7.2. On montre d'abord le lemme de zéro suivant.

Lemme 7.3. *Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z)$, $b(z)$, $A(z)$, d et ν choisis comme dans le théorème 7.1. Soient h un entier et $\mathbf{w}(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z)) \in (\mathbf{k}[z]_h)^n$. Si la valuation en $z = 0$ de la série*

$$s(z) := \sum_{i=1}^{n} w_i(z) f_i(z)$$

est strictement supérieure à

$$\left\lceil \frac{q^{n((qh+d+1)/(q-1)+q+1)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil \tag{7.1}$$

alors la série $s(z)$ est identiquement nulle.

Démonstration. Supposons par l'absurde que la valuation en $z = 0$ de la série $s(z)$ est finie et égale à

$$M > \left\lceil \frac{q^{n((qh+d+1)/(q-1)+q+1)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil . \tag{7.2}$$

On montre tout d'abord qu'on peut se ramener au cas où $b(z) = z^{\nu}$. En effet, posons

$$\beta(z) := b(z) z^{-\nu} \qquad \text{et} \qquad u(z) := \prod_{i=0}^{\infty} \beta(z^{q^i}).$$

Il vient $u(z) = z^{-\nu} b(z) u(z^q)$ et, en posant $\tilde{\mathbf{f}}(z) := u(z)\mathbf{f}(z)$, on vérifie que $\tilde{\mathbf{f}}(z)$ est solution du système

$$\tilde{\mathbf{f}}(z) = z^{-\nu} \tilde{A}(z) \tilde{\mathbf{f}}(z^q), \tag{7.3}$$

où $\tilde{A}(z) = b(z)A(z)$ est une matrice à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$. Comme la valuation en $z = 0$ de la série u est nulle, celle de $\tilde{s}(z) := \mathbf{w}(z)\tilde{\mathbf{f}}(z)$ reste égale à M. Dans la suite, nous supposerons donc que $b(z) = z^{\nu}$ et nous noterons

$$A(z) = z^{-\nu} \tilde{A}(z), \quad \text{avec } \tilde{A}(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k}[z]).$$

Pour tout entier i, on considère le vecteur suivant :

$$\mathbf{g}_i := \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{i-h} \end{pmatrix} \in (\mathbf{k}^n)^{h+1}.$$

On pose également $\mathbf{v} := \varphi^{-1}(\mathbf{w}(z))$. L'égalité (7.2) se récrit :

$$\begin{cases} \mathbf{v}\mathbf{g}_i &= 0 \quad \forall i < M, \\ \mathbf{v}\mathbf{g}_M &\neq 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

où $\mathbf{v}\mathbf{g}_i$ représente la multiplication matricielle usuelle entre le vecteur ligne $\mathbf{v}$ et le vecteur colonne $\mathbf{g}_i$. Notons $\mathbf{g}(z) := \sum \mathbf{g}_i z^i$ et considérons la matrice par blocs suivante :

$$B(z) := \begin{pmatrix} \tilde{A}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ z\tilde{A}(z) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^h\tilde{A}(z) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n(h+1)}(\mathbf{k}[z]).$$

On obtient ainsi une nouvelle équation mahlérienne :

$$\mathbf{g}(z) = z^{-\nu} B(z)\mathbf{g}(z^k). \tag{7.5}$$

Remarquons au passage que $\deg B \leqslant \deg \tilde{A} + h \leqslant d + h$. On peut alors décomposer la matrice $B(z)$ selon les puissances de z

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\deg B} B_i z^i,$$

où les matrices B_i appartiennent à $\mathcal{M}_{n(h+1)}(\mathbf{k})$. Notons alors

$$e := \left\lfloor \frac{\deg B(z)}{q} \right\rfloor + 1.$$

Soit i un entier. On considère l'unique couple d'entiers (s, j) tel que $i = qs + j - \nu$ et $0 \leqslant j < q$. L'identification des termes en z^i dans l'équation (7.5) induit la relation suivante :

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{qs+j-\nu} = \sum_{r=0}^{e-1} B_{qr+j}\mathbf{g}_{s-r}, \tag{7.6}$$

où l'on a posé $B_l = 0$ pour $l > \deg B$, et $\mathbf{g}_l = 0$ pour $l < 0$. Fixons $m > 0$ et choisissons alors i' un entier tel que $i \leqslant i' < i + qm$. Si $i' = qs' + j' - \nu$, avec $j' < q$, on a nécessairement $s \leqslant s' < s + m$. On a également

$$\mathbf{g}_{i'} = \sum_{r=0}^{e-1} B_{qr+j'}\mathbf{g}_{s'-r}. \tag{7.7}$$

Le couple (i, m) étant fixé, Les vecteurs colonne intervenant dans le membre de droite de (7.7), quand i' parcourt l'ensemble $\{i, \ldots, i + qm - 1\}$, sont donc les $e + m$ vecteurs $\mathbf{g}_{s-e+1}, \ldots, \mathbf{g}_{s+m}$. Définissons alors l'entier m de la manière suivante :

$$m := \left\lfloor \frac{e}{q-1} \right\rfloor + 1.$$

Il est choisi de sorte que $qm > e + m$. On considère alors, pour chaque entier i, le vecteur

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{i+qm-1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_i \end{pmatrix} \in \mathbf{k}^{n(h+1)qm}. \tag{7.8}$$

Remarquons que par définition des $\mathbf{g}_i$, on a

$$\mathbf{G}_i := \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{i+qm-1} \\ \mathbf{f}_{i+qm-2} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{i+qm-h} \\ \mathbf{f}_{i+qm-2} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{i-h+1} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\mathbf{G}_i$ appartiennent donc tous au sous-espace vectoriel W de $\mathbf{k}^{n(h+1)qm}$ formé des vecteurs de la forme

$$(X_1, X_2, \ldots, X_h, X_2, X_3, \ldots, X_{h+1}, X_3, \ldots, X_{qm+h})^T, \text{ oú } X_l \in \mathbf{k}^n.$$

L'identité (7.7) assure l'existence de q matrices $C_0, \ldots, C_{q-1} \in \mathcal{M}_{n(h+1)qm}(\mathbf{k})$ telles que, pour tout entier i, on a :

$$\mathbf{G}_i = C_j \mathbf{G}_{s-e+1}, \tag{7.9}$$

où $i = qs + j - \nu$. On considère à présent la suite d'espaces emboîtés

$$V_l := \mathrm{Vect}\{\mathbf{G}_0, \ldots, \mathbf{G}_l\} \subset W.$$

Pour conclure cette démonstration on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 7.4. *Soit $a \geqslant (\nu - d)/(q-1)$ un entier. Si*

$$V_a = V_{q(a+e)-\nu-1},$$

alors la suite $(V_l)_{l\geqslant 0}$ est constante à partir du rang a.

Démonstration du lemme 7.4. Choisissons un entier $j < q$. Pour tout r, l'égalité (7.9) implique que

$$C_j \mathbf{G}_r = \mathbf{G}_{q(r+e-1)+j-\nu}.$$

Si $r \leqslant a$, alors $q(r+e-1)+j-\nu \leqslant q(a+e)-\nu-1$ et donc

$$C_j \mathbf{G}_r \in V_{q(a+e)-\nu-1} = V_a.$$

L'action du monoïde engendré par les matrices $C_0, \ldots, C_{q-1}$ stabilise donc l'espace V_a. Prenons maintenant un entier $b > a$. Comme $a \geqslant (\nu-d)/(q-1)$, l'égalité (7.9) assure l'existence d'indices $j_1, \ldots, j_r$ et d'un entier $l \leqslant a$ tels que

$$\mathbf{G}_b = C_{j_1} \cdots C_{j_r} \mathbf{G}_l.$$

Donc $\mathbf{G}_b \in V_a$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'achever la preuve du lemme 7.3. Les vecteurs $\mathbf{G}_i$ appartiennent tous à l'espace W. Un calcul rapide montre que la dimension de cet espace n'excède pas $n(h+qm)$. Partant de $a = \lceil (\nu-d)(q-1)^{-1} \rceil$, et en appliquant $n(h+qm)$ fois, de façon récursive, le lemme 7.4, on obtient que la suite d'espaces vectoriels emboîtés V_l est nécessairement constante à partir du rang

$$\left\lceil \frac{q^{n(h+qm)}(qe-d)+\nu-qe}{q-1} \right\rceil. \tag{7.10}$$

En remplaçant e et m par leurs valeurs respectives, on obtient que

$$
\begin{aligned}
M &> \left\lceil \frac{q^{n((qh+d+1)/(q-1)+q+1)}(h+q)+\nu-\frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil \\
&\geqslant \left\lceil \frac{q^{n(h+qm)}(qe-d)+\nu-qe}{q-1} \right\rceil .
\end{aligned}
$$

La suite $(V_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est donc constante à partir du rang $M-1$ et donc $\mathbf{G}_M \in V_{M-1}$.

D'après (7.4), le vecteur $\mathbf{v} = (\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_h) \in (\mathbf{k}^n)^{h+1}$ est tel que

$$
\mathbf{v}\mathbf{g}_i = 0,
$$

pour tout entier $i < M$. Posons $\mathbf{u} := (\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}) \in \mathbf{k}^{n(h+1)qm}$. Il vient alors que

$$
\mathbf{u}\mathbf{G}_i = 0,
$$

pour tout $i < M$. Le vecteur $\mathbf{u}$ appartient donc à l'orthogonal de V_{M-1}. Mais comme $\mathbf{G}_M \in V_{M-1}$, le vecteur $\mathbf{u}$ est aussi orthogonal au vecteur $\mathbf{G}_M$ et donc $\mathbf{u}\mathbf{G}_M = 0$. En considérant les $n(h+1)$ dernières coordonnées des vecteurs $\mathbf{G}_M$ et $\mathbf{u}$, on voit que cette dernière égalité implique

$$
\mathbf{v}\mathbf{g}_M = 0,
$$

ce qui contredit (7.4). Cela termine la démonstration. □

Le lemme suivant assure l'existence, lorsque les fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{k}(z)$, d'une relation de dépendance linéaire de petite hauteur.

LEMME 7.5. *Soient $f_1(z), \dots, f_n(z)$, $b(z)$, $A(z)$ et d choisis comme dans le théorème 7.1. Supposons que les fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{k}(z)$. Soit $h := \lfloor d/(q-1) \rfloor$. Alors, il existe un vecteur non nul $\mathbf{w}(z) := (w_0(z), \dots, w_n(z)) \in (\mathbf{k}[z]_h)^n$ tel que*

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i(z) f_i(z) = 0.
$$

Démonstration. Soit h le degré de la plus petite relation linéaire non triviale sur $\mathbf{k}[z]$ entre les fonctions $f_1(z), \dots, f_n(z)$, et $\mathbf{w}(z)$ le vecteur des coefficients d'une telle relation. Posons $A(z) = b(z)\tilde{A}(z)$, $\tilde{A}(z)$ à coefficients dans $\mathbf{k}[z]$. Utilisant la relation fonctionnelle (1.2), on écrit

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbf{w}(z)\mathbf{f}(z) \\
&= \mathbf{w}(z)A(z)\mathbf{f}(z^q) \\
&= \mathbf{w}(z)\tilde{A}(z)\mathbf{f}(z^q).
\end{aligned}
$$

On peut décomposer le vecteur $\mathbf{w}(z)\tilde{A}(z) \in \mathbf{k}[z]^n$ selon les restes de puissances de z modulo q. On obtient alors la décomposition unique suivante :

$$
\mathbf{w}(z)\tilde{A}(z) = \sum_{i=0}^{q-1} z^i \mathbf{v}_i(z^q).
$$

L'identité $\mathbf{w}(z)\tilde{A}(z)\mathbf{f}(z^q) = 0$ implique alors que

$$
\mathbf{v}_i(z)\mathbf{f}(z) = 0,
$$

pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant q-1$. Comme par hypothèse $\mathbf{w}(z)$ est non nul, il existe un indice i_0 tel que le vecteur $\mathbf{v}_{i_0}(z)$ soit non nul. Notons l le degré maximal des coefficients de $\mathbf{v}_{i_0}$. Par minimalité de h, on a $l \geqslant h$. D'autre part, comme le degré de $\mathbf{w}(z)\tilde{A}(z)$ est inférieur à $h+d$, on a

$$ql + i_0 \leqslant h + d.$$

On en déduit que $qh \leqslant h + d$, ce qui permet de conclure. □

Nous sommes à présent en mesure de prouver les théorèmes 7.1 et 7.2.

Démonstration du théorème 7.1. Posons $h := 4^n d$ et

$$c := \left\lceil \frac{q^{n((qh+d+1)/(q-1)+q+1)}(h+q) + \nu - \frac{h+d}{q-1}}{q-1} \right\rceil .$$

Les inclusions

$$\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_n(z)\right) \subset \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$$

et

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_n(z)) \subset \varphi\left(\ker_{\mathbf{k}} \mathcal{S}(h,c,\mathbf{f})\right)$$

sont immédiates. L'inclusion $\varphi(\ker_{\mathbf{k}} \mathcal{S}(h,c,\mathbf{f})) \subset \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ est quant à elle une reformulation directe du lemme 7.3. Il ne reste donc plus qu'à prouver l'inclusion

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z)) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z),\ldots,f_n(z)\right).$$

Montrer cette inclusion revient à montrer l'existence d'une base de relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur à $4^n d$. Soit r la dimension de l'espace $\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z))$. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur l'entier r.

Si $r=0$, il n'y a rien à prouver. Supposons alors l'égalité vraie pour tout système de la forme (1.2) lorsque la dimension de l'espace des relations linéaires entre les fonctions vaut $r-1$. Supposons que

$$\dim \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z),\ldots,f_n(z)) = r.$$

On va réduire le système pour se ramener à un système de taille $n-1$. D'après le lemme 7.5, il existe un vecteur $\mathbf{w}(z) \in (\mathbf{k}[z]_{h_0})^n$, où $h_0 = \left\lfloor \frac{d}{q-1} \right\rfloor$, tel que

$$\mathbf{w}(z)\mathbf{f}(z) = w_1(z)f_1(z) + \cdots + w_n(z)f_n(z) = 0. \tag{7.11}$$

On peut supposer, quitte à renuméroter les fonctions, que $w_n(z) \neq 0$. On conjugue alors l'équation fonctionnelle de $\mathbf{f}$ par la matrice

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ w_1(z) & w_2(z) & \cdots & w_{n-1}(z) & w_n(z) \end{pmatrix}.$$

On obtient le système

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z) \\ 0 \end{pmatrix} = S(z)A(z)S(z^q)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z^q) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

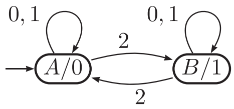


FIGURE 1. *Un* 3*-automate produisant la suite* $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Notons $B(z)$ le mineur principal de taille $(n-1)$ de la matrice $S(z)A(z)S(z^q)^{-1}$. On obtient alors le système de taille $(n-1)$ suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^q) \\ \vdots \\ f_{n-1}(z^q) \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

Par construction, le polynôme $w_n(z^q)b(z)$ est un multiple commun aux dénominateurs des coefficients de la matrice $B(z)$. La matrice $w_n(z^q)b(z)B(z)$ est donc à coefficients polynomiaux. On peut majorer le degré de ces polynômes par

$$h_0 q + d \leqslant \frac{d}{q-1}q + d \leqslant d\frac{2q}{q-1} \leqslant 4d.$$

Comme $w_n(z) \neq 0$, on a

$$\dim \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \dots, f_{n-1}(z)) = r - 1$$

et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au système (7.12). On obtient :

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \dots, f_{n-1}(z)) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}(z)}\Big(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_{h_1}}(f_1(z), \dots, f_{n-1}(z))\Big),$$

où $h_1 := 4^{n-1}4d = 4^n d = h$. D'autre part, on a

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z)) = \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \dots, f_{n-1}(z)) \oplus_{\mathbf{k}(z)} \mathbf{k}(z).\mathbf{w}(z),$$

et par hypothèse $\mathbf{w}(z) \in \mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z), \dots, f_n(z))$. On en déduit

$$\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}(z)}(f_1(z), \dots, f_n(z)) \subset \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}(z)}\left(\mathrm{Rel}_{\mathbf{k}[z]_h}(f_1(z), \dots, f_n(z))\right),$$

comme voulu. Cela conclut la démonstration. □

Démonstration du théorème 7.2. Le théorème découle immédiatement des lemmes 7.3 et 7.5. □

8. *Deux exemples de systèmes automatiques*

Nous illustrons ici les résultats obtenus à travers deux exemples. Pour les définitions relatives aux automates finis et aux suites automatiques, nous renvoyons le lecteur à [**5**].

8.1. *Premier exemple*

On définit la suite binaire $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante : $a_n = 0$ si le développement en base 3 de l'entier n a un nombre pair de chiffres égaux à 2 et $a_n = 1$ si ce nombre est impair. Il s'agit d'une variante de la célèbre suite de Thue–Morse. Notons $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}\{z\}$ la série génératrice associée ; elle est analytique dans le disque unité ouvert. Par définition, il s'agit d'une série 3-automatique. Comme la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs entières et qu'elle n'est pas ultimement périodique, on obtient facilement que $f(z)$ est transcendante. Pour α algébrique, $0 < |\alpha| < 1$, on se propose d'étudier la transcendance du nombre automatique $f(\alpha)$.

Posons $f_1(z) := f(z)$ et $f_2(z) := \sum_{n\geqslant 0}(1-a_n)z^n$. On vérifie sans peine que ces deux fonctions sont 3-mahlériennes et solutions du système fonctionnel suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \end{pmatrix},$$

où

$$A(z) := \begin{pmatrix} 1+z & z^2 \\ z^2 & 1+z \end{pmatrix}.$$

Le théorème 7.2 permet de montrer facilement que les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$. Avec les notations du théorème 7.2, on a ici $n=2$, $d=2$, $q=3$ et $\nu=0$. On en déduit que $h=1$ et $c=(3^{14}\times 8-3)/4$. On vérifie alors que les quatre premières colonnes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la matrice $\mathcal{S}(1,(3^{14}\times 8-3)/4,\mathbf{f})$ sont linéairement indépendantes, où $\mathbf{f}(z) := (f_1(z), f_2(z))$. Il suit que $\ker_{\mathbb{Q}} \mathcal{S}(1,(3^{14}\times 8-3)/4,\mathbf{f}) = \{0\}$, ce qui permet de conclure. On a cependant par définition la relation affine suivante :

$$f_1(z)+f_2(z) = \frac{1}{1-z}\cdot$$

Le déterminant de $A(z)$ n'a qu'une racine dans le disque unité ouvert ; il s'agit du point $\phi := (1-\sqrt{5})/2$. On obtient donc que l'ensemble des points singuliers de notre système est

$$\mathcal{E} := \left\{\phi^{1/3^l} \mid l \geqslant 1\right\}.$$

En un point algébrique α qui n'est pas dans $\mathcal{E}$, le théorème 1.4 implique directement que $f(\alpha)$ est transcendant. En effet, dans le cas contraire on aurait également $f_2(\alpha)$ algébrique, car $f_1(z)+f_2(z) = 1/(1-z)$, et on en déduirait donc une relation linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ entre $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$, ce qui est impossible puisque $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Notons qu'au point ϕ, on a

$$\begin{pmatrix} f_1(\phi) \\ f_2(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\phi & 1+\phi \\ 1+\phi & 1+\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\phi^3) \\ f_2(\phi^3) \end{pmatrix}$$

et en particulier $f_1(\phi) = f_2(\phi)$. Comme $f_1(z)+f_2(z) = 1/(1-z)$, on en déduit que $f_1(\phi) = -\phi/2 \in \mathbb{Q}(\phi)$, en dépit du fait que les coefficients de $f_1(z)$ soient des entiers et que $f_1(z)$ soit transcendante. En raisonnant par récurrence, on obtient d'ailleurs que $f_1(\phi^{1/3^l}) \in \mathbb{Q}(\phi^{1/3l})$ pour tout entier $l \geqslant 1$. En résumé, on obtient le résultat suivant.

Proposition 8.1. *Soit α un nombre algébrique, $0<|\alpha|<1$. On a l'alternative suivante : soit il existe $l\geqslant 1$ tel que $\alpha = \phi^{1/3^l}$ et alors $f(\alpha) \in \mathbb{Q}(\phi^{1/3^l})$, soit $f(\alpha)$ est transcendant.*

Comme les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, les relations de dépendance linéaire entre leurs valeurs apparaissent donc toutes comme ayant une origine matricielle (elles sont données par le noyau des matrices $A_l(\phi)$). Cette origine des relations dépend en fait du système choisi pour les étudier et on assiste à un principe des vases communicants, comme l'illustre la remarque suivante. En appliquant l'astuce de dédoublement du lemme 5.2, on peut obtenir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} f_1(z^3) \\ f_2(z^3) \\ f_1(z^9) \\ f_2(z^9) \end{pmatrix},$$

avec

$$B(z) := \begin{pmatrix} z & z^2 & 1+z^3 & z^6 \\ z^2 & z & z^6 & 1+z^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ϕ est à présent un point régulier pour ce nouveau système. Evidemment, le dédoublement du système a créé deux relations linéaires libres entre les fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z) := f_1(z^3)$ et $f_4(z) := f_2(z^3)$, à savoir,

$$f_1(z) - (1+z)f_3(z) - z^2 f_4(z) = 0 \text{ et } f_2(z) - z^2 f_3(z) - (1+z)f_4(z) = 0.$$

Les fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ et $f_4(z)$ sont donc à présent linéairement dépendantes sur $\mathbb{Q}(z)$ et il n'y a pas de contradiction. Les relations linéaires entre les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ aux points de l'ensemble $\mathcal{E}$ apparaissent dans ce nouveau système comme ayant une origine fonctionnelle, c'est-à-dire qu'elles sont obtenues comme spécialisation d'une relation sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ et $f_4(z)$.

8.2. *Second exemple*

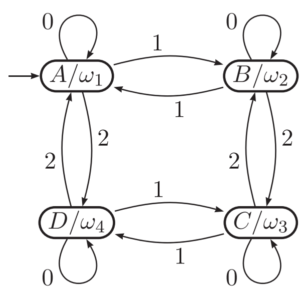
Il s'agit d'une variante de l'exemple précédent. On considère les quatre suites binaires $\mathbf{a}_1 := (a_{1,n})_{n\geqslant 0}, \mathbf{a}_2 := (a_{2,n})_{n\geqslant 0}, \mathbf{a}_3 := (a_{3,n})_{n\geqslant 0}$ et $\mathbf{a}_4 := (a_{4,n})_{n\geqslant 0}$ définies comme suit :

$$\begin{cases} a_{1,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre pair de 1 et de 2} \\ a_{2,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre impair de 1 et pair de 2} \\ a_{3,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre impair de 1 et de 2} \\ a_{4,n} = 1 \iff (n)_3 \text{ a un nombre pair de 1 et impair de 2} \end{cases}$$

On considère également les séries génératrices associées à ces suites, à savoir :

$$g_i(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_{i,n} z^n, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4.$$

Les fonctions $g_i(z)$ sont 3-automatiques. Plus précisément, étant donnés des nombres algébriques $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, on peut vérifier que la suite $\omega_1\mathbf{a}_1 + \omega_2\mathbf{a}_2 + \omega_3\mathbf{a}_3 + \omega_4\mathbf{a}_4$ est engendré par le 3-automate suivant :



Étant donné un nombre algébrique α, $0 < |\alpha| < 1$, on se propose de décrire les vecteurs $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \overline{\mathbb{Q}}^4$ pour lesquels le nombre « automatique »

$$\omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha)$$

est transcendant.

Les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$ et $g_4(z)$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ g_3(z) \\ g_4(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & z^2 \\ z & 1 & z^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 1 & z \\ z^2 & 0 & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(z^3) \\ g_2(z^3) \\ g_3(z^3) \\ g_4(z^3) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on notera

$$\mathbf{g}(z) := \begin{pmatrix} g_1(z) \\ g_2(z) \\ g_3(z) \\ g_4(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(z) := \begin{pmatrix} 1 & z & 0 & z^2 \\ z & 1 & z^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 1 & z \\ z^2 & 0 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition des suites $\mathbf{a}_i$, on a la relation affine $g_1(z) + g_2(z) + g_3(z) + g_4(z) = 1/(1-z)$. Nous allons montrer qu'il n'existe par contre pas de relation linéaire homogène non triviale entre les $g_i(z)$.

Lemme 8.2. *Les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$ et $g_4(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.*

Démonstration. Comme dans l'exemple précédent, il s'agit d'une conséquence directe du théorème 7.2. Avec les notations du théorème 7.2, on a ici $n = 4$, $d = 2$, $q = 3$ et $\nu = 0$. On en déduit que $h = 1$ et $c = (3^{28} \times 8 - 3)/4$. Ainsi, l'existence d'une relation linéaire non triviale entre les fonctions $g_i(z)$ est équivalente à la non nullité de l'espace $\ker_{\mathbb{Q}} \mathcal{S}(1, (3^{28} \times 8 - 3)/4, \mathbf{g})$. La définition des fonctions $g_i(z)$ nous permet de calculer explicitement les premières colonnes de cette matrice. Il vient pour les huits premières colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que ces huit vecteurs sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On en déduit que $\ker_{\mathbb{Q}} \mathcal{S}(1, (3^{28} \times 8 - 3)/4, \mathbf{g}) = \{0\}$. Le théorème 7.2 implique alors que les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z), g_4(z)$ sont linéairement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. □

Comme dans l'exemple précédent, on voit facilement que le déterminant de la matrice $A(z)$ a une unique racine dans le disque unité ouvert qui est encore $\phi := (1 - \sqrt{5})/2$. Les autres racines sont le nombre d'or et les deux racines cubiques primitives de l'unité. L'ensemble des points singuliers de notre système est donc à nouveau l'ensemble

$$\mathcal{E} := \left\{ \phi^{1/3^l} \mid l \geqslant 1 \right\}.$$

Le théorème 1.9 permet alors de montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 8.3. *Soient α, $0 < |\alpha| < 1$, un nombre algébrique et* $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \overline{\mathbb{Q}}^4$ *un vecteur de nombres algébriques non tous égaux. Alors, le nombre*

$$\omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha)$$

est algébrique si, et seulement si, il existe un entier $l \geqslant 1$ tel que $\alpha = \phi^{1/3^l}$ et $\boldsymbol{\omega}$ est de la forme $\boldsymbol{\mu} + \lambda(1,1,1,1)$ avec $\boldsymbol{\mu} \in \ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A_l(\alpha)$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Posons $\beta := \omega_1 g_1(\alpha) + \omega_2 g_2(\alpha) + \omega_3 g_3(\alpha) + \omega_4 g_4(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. En utilisant la relation $g_1(z) + g_2(z) + g_3(z) + g_4(z) = 1/(1-z)$, il vient :

$$(\omega_1 - \beta(1-\alpha))\, g_1(\alpha) + \cdots + (\omega_4 - \beta(1-\alpha))\, g_4(\alpha) = 0.$$

Par hypothèse, les nombres $\omega_i - \beta(1-\alpha)$ ne sont pas tous nuls. D'autre part, les fonctions $g_1(z), g_2(z), g_3(z)$ et $g_4(z)$ sont linéairement indépendantes d'après le lemme 8.2. Donc, d'après le théorème 1.4, le nombre α ne peut pas être un point régulier du système. Il existe donc $l \geqslant 1$ tel que $\alpha^{3^l} = \phi$. Le théorème 1.9 montre alors que le vecteur

$$\boldsymbol{\mu} := (\omega_1 - \beta(1-\alpha), \omega_2 - \beta(1-\alpha), \omega_3 - \beta(1-\alpha), \omega_4 - \beta(1-\alpha))$$

appartient nécessairement à $\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A_l(\alpha)$, ce qui permet de conclure. □

REMARQUE 8.4. Si l'on choisit $l = 1$, c'est-à-dire si $\alpha = \phi$, on obtient que $\ker_{\overline{\mathbb{Q}}} A(\phi)$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $(1, 1, -1, -1)$. On en déduit facilement que les nombres $g_1(\phi), g_2(\phi), g_3(\phi)$ et $g_4(\phi)$ sont tous transcendants, bien que ϕ soit une singularité du système. Ce comportement est donc très différent du premier exemple. En effet, nous avons vu dans ce premier cas que les deux nombres $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ sont algébriques pour toute singularité α.

Remerciements. Les auteurs remercient Patrice Philippon de leur avoir communiqué une version préliminaire dela prépublication [**31**], ainsi que Jean-Paul Allouche pour ses remarques concernant une première version de ce texte. Ils remercient également Jason Bell pour leur avoir indiqué la monographie de Lang [**19**] comme référence possible pour le résultat utilisé au début de la démonstration du lemme 3.2.

References

1. B. ADAMCZEWSKI et Y. BUGEAUD, 'On thecomplexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases', *Ann. of Math.* 165 (2007) 547–565.

2. B. ADAMCZEWSKI, Y. BUGEAUD et F. LUCA, 'Sur la complexité des nombres algébriques', *C. R. Acad. Sci. Paris* 339 (2004) 11–14.

3. B. ADAMCZEWSKI, J. CASSAIGNE et M. LEGONIDEC, 'On the computational complexity of algebraic numbers: the Hartmanis–Stearns problem revisited', Preprint, 2016, arXiv:1601.02771[math.NT].

4. B. ADAMCZEWSKI et C. FAVERJON, 'Méthode de Mahler, transcendance et relations linéaires : aspects effectifs', *J. Théor. Nombres Bordeaux.*, to appear.

5. J.-P. ALLOUCHE et J. SHALLIT, *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

6. Y. ANDRÉ, 'Séries Gevrey de type arithmétique I. Théorèmes de pureté et de dualité', *Ann. of Math.* 151 (2000) 705–740.

7. Y. ANDRÉ, 'Séries Gevrey de type arithmétique II. Transcendance sans transcendance', *Ann. of Math.* 151 (2000) 741–756.

8. Y. ANDRÉ, 'Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence', *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* 47 (2014) 449–467.

9. J. BELL, Y. BUGEAUD et M. COONS, 'Diophantine approximation of Mahler numbers', *Proc. London Math. Soc.* 110 (2015) 1157–1206.

10. F. BEUKERS, 'A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem', *Ann. of Math.* 163 (2006) 369–379.

11. É. BOREL, 'Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques', *Rend. Circ. Mat. Palermo* 27 (1909) 247–271.

12. R. P. BRENT, M. COONS et W. ZUDILIN, 'Algebraic independence of Mahler functions via radial asymptotics', *Int. Math. Res. Not.* 2016 (2016) 571–603.

13. A. Cobham, 'Functional equations for register machines', *Proccedings of the Hawaï International Conference on System Sciences* (Honolulu, 1968).
14. A. Cobham, *A proof of transcendence based on functional equations*, RC–2041 (IBM Research Center, Yorktown Heights, New York, 1968).
15. A. Cobham, 'On the Hartmanis-Stearns problem for a class of tag machines', *Conference Record of 1968 Ninth Annual Symposium on Switching and Automata Theory*, Schenectady, New York (1968) 51–60.
16. A. O. Gelfond, *Transcendental and algebraic numbers* (Dover Publications, New York, 1960).
17. J. Hartmanis et R. E. Stearns, 'On the computational complexity of algorithms', *Trans. Amer. Math. Soc.* 117 (1965) 285–306.
18. W. Krull, 'Parameterspezialisierung in Polynomringen II. Das Grundpolynom', *Arch. Math.* (Basel) 1 (1948) 129–137.
19. S. Lang, *Algebra*, Revised third edition, Graduate Texts in Mathematics 21 (Springer, New York, 2002).
20. J. H. Loxton, 'Automata and transcendence', *New advances in transcendence theory* (Durham, 1986) (Cambridge University Press, Cambridge, 1988) 215–228.
21. J. H. Loxton et A. J. van der Poorten, 'Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations', *J. reine angew. Math.* 330 (1982) 159–172.
22. J. H. Loxton et A. J. van der Poorten, 'Arithmetic properties of automata: regular sequences', *J. reine angew. Math.* 392 (1988) 57–610.
23. K. Mahler, 'Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen', *Math. Ann.* 101 (1929) 342–367.
24. K. Mahler, 'Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendente Funktionen', *Math. Z.* 32 (1930) 545–585.
25. K. Mahler, 'Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen', *Math. Ann.* 103 (1930) 573–587.
26. M. Mendès France, 'Nombres algébriques et théorie des automates', *Enseign. Math.* 26 (1980) 193–199.
27. M. Morse et G. A. Hedlund, 'Symbolic dynamics', *Amer. J. Math.* 60 (1938) 815–866.
28. Y. V. Nesterenko et A. B. Shidlovskii, 'On the linear independence of values of E-functions', *Mat. Sb.* 187 (1996) 93–108; translation in *Sb. Math.* 187 (1996) 1197–1211.
29. K. Nishioka, 'New approach in Mahler's method', *J. reine angew. Math.* 407 (1990) 202–219.
30. K. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Mathematics 1631 (Springer, Berlin, 1997).
31. P. Philippon, 'Groupes de Galois et nombres automatiques', prétirage 2015, arXiv:1502.00942v1 [math.NT].
32. P. Philippon, 'Groupes de Galois et nombres automatiques', *J. Lond. Math. Soc.* 95 (2015) 596–614.
33. B. Randé, 'Équations Fonctionnelles de Mahler et Applications aux Suites p-régulières', Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Talence, 1992.
34. A. Rényi, 'Representations for real numbers and their ergodic properties', *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 8 (1957) 477–493.
35. J. Roques, 'On the algebraic relations between Mahler functions', *Trans. Amer. Math. Soc.*, doi:https://doi.org/10.1090/tran/6945.
36. A. M. Turing, 'On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem', *Proc. Lond. Math. Soc.* 42 (1937) 230–265; corrigendum 43 (1937) 544–546.
37. O. Zariski et P. Samuel, *Commutative algebra II*, Graduate Texts in Mathematics 29 (Springer, New York-Heidelberg, 1975).

Boris Adamczewski
CNRS
Université de Lyon, Université Lyon 1
Institut Camille Jordan
43 boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex
France

boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Colin Faverjon
Académie de Créteil – Education Nationale
93300 Aubervilliers
France

colin.faverjon@ac-creteil.fr