Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt

Boris Adamczewski (Lyon) & Yann Bugeaud (Strasbourg)

Abstract. *A proof of the transcendence of a real number ξ based on the Thue–Siegel–Roth–Schmidt method uses generally a sequence $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ of algebraic numbers of bounded degree or a sequence $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ of integer r-tuples. In the present paper, we show how such a proof can produce a transcendence measure for ξ, if one is able to quantify the growth of the heights of the algebraic numbers α_n or of the points $\mathbf{x}_n$. Our method rests on the Quantitative Schmidt Subspace Theorem. We further give several applications, including to certain normal numbers, to the extremal numbers introduced by Roy, and to the study of real numbers whose expansion in some integer base has sublinear complexity. In particular, we establish transcendence measures for automatic irrational real numbers.*

Résumé. *Une démonstration de la transcendance d'un nombre réel ξ fondée sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt fait généralement intervenir une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques de degrés bornés ou bien une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ de r-uplets d'entiers. Dans cet article, nous montrons comment une telle démonstration peut produire une mesure de transcendance de ξ, pour peu que l'on sache quantifier la croissance des hauteurs des nombres algébriques α_n ou des points $\mathbf{x}_n$. La méthode développée repose sur l'utilisation d'énoncés quantitatifs du théorème du sous-espace de Schmidt. Nous appliquons ensuite cette nouvelle approche à certains nombres normaux, aux nombres extrémaux de Roy, ainsi qu'à l'étude des nombres réels de complexité sous-linéaire. En particulier, nous établissons des mesures de transcendance pour les nombres réels irrationnels automatiques.*

2000 *Mathematics Subject Classification : 11J82*

Table des matières

1. Introduction. 3

2. Le théorème de Roth et ses extensions. 5

3. Extension p-adique du théorème de Baker et applications. 7

  3.1. Extension p-adique du théorème de Baker. 7

  3.2. Nombres normaux et classification de Mahler. 8

4. Extensions multidimensionnelles du théorème de Baker et applications. 9

  4.1. Extensions multidimensionnelles du théorème de Baker. 9

  4.2. Exposants d'approximation diophantienne, nombres extrémaux de Roy et classification de Mahler. 11

5. Nombres réels de complexité sous-linéaire. 13

  5.1. Complexité des nombres réels et mesures de transcendance. 13

  5.2. Exposant diophantien et approximation rationnelle. 14

  5.3. Applications aux nombres lacunaires, automatiques et sturmiens. 16

6. Le théorème du sous-espace quantitatif. 18

7. Résultats auxiliaires. 20

8. Démonstration du théorème 3.1. 23

9. Démonstrations des théorèmes 4.1 et 4.2. 26

10. Démonstration du théorème 5.3. 34

  10.1. Combinatoire des suites de complexité sous-linéaire. 34

  10.2. Approximation algébrique des nombres de complexité sous-linéaire. 37

11. Approximation rationnelle des nombres de complexité sous-linéaire 40

12. L'exposant diophantien des mots sturmiens. 45

13. Remarques finales. 50

Références bibliographiques. 51

1. Introduction

Une démonstration de l'irrationalité d'un nombre réel ξ faisant appel à l'approximation diophantienne met généralement en évidence une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombres rationnels distincts qui converge vers ξ, à savoir telle que

$$0 < |q_n\xi - p_n| < \delta_n, \tag{1.1}$$

où $(\delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs tendant vers 0. Lorsque l'on est capable de contrôler à la fois la croissance de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ et la vitesse de convergence de la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$, la démonstration produit en fait une *mesure d'irrationalité* de ξ, dans le sens où elle permet de construire d'une manière non triviale une fonction Ψ prenant des valeurs positives et telle que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \Psi(q),$$

pour tout nombre rationnel p/q. Cela découle d'une méthode élémentaire fondée sur l'utilisation d'inégalités triangulaires, laquelle, dans le cas particulier où il existe $\delta > 0$ tel que $\delta_n < q_n^{-\delta}$ et où

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty, \tag{1.2}$$

entraîne que l'*exposant d'irrationalité* $\mu(\xi)$ de ξ est fini. Rappelons que $\mu(\xi)$ désigne le supremum des nombres réels w tels que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q^{-w}$$

possède une infinité de solutions rationnelles p/q. Cette technique, que nous utilisons dans la partie 12, permet par exemple de majorer l'exposant d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ (voir [25]). Notons cependant que l'approche élémentaire à laquelle nous venons de faire allusion garantit uniquement le contrôle de l'approximation de ξ par des nombres algébriques dont le degré n'excède pas $1 + \delta$.

De façon similaire, une démonstration de la transcendance d'un nombre réel ξ fondée sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt fait intervenir une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques de degrés bornés ou bien une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ de r-uplets d'entiers. Dans le présent article, nous nous intéressons à une généralisation de la problématique précédente en nous demandant si une telle démonstration produit nécessairement une mesure de transcendance de ξ, pour peu que l'on sache quantifier la croissance des hauteurs des nombres algébriques α_n ou des points $\mathbf{x}_n$.

Le premier (et à notre connaissance le seul) résultat dans cette direction, établi en 1964 par A. Baker [10], donne une mesure de transcendance explicite de tout nombre réel ξ pour lequel il existe $\delta > 1$ et une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels distincts vérifiant $q_n \geq 1$, (1.2) et (1.1) avec $\delta_n \leq q_n^{-\delta}$. Le point de départ de notre approche est une nouvelle démonstration de ce résultat, beaucoup plus simple que la démonstration originale, et qui a l'avantage de se prêter sans trop de difficultés techniques à des généralisations p-adiques et multidimensionnelles. Notre nouvelle méthode repose sur l'utilisation d'énoncés quantitatifs issus de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt, que nous rappelons dans la partie 6. Dans cette direction, les théorèmes 3.1, 4.1 et 4.2, ainsi que le corollaire 4.3, apportent une réponse essentiellement positive à la question posée ci-dessus. Nous présentons quelques applications de ces résultats. Tout d'abord, dans la partie 3.2, nous montrons comment l'extension p-adique du théorème d'A. Baker permet d'obtenir des mesures de transcendance de nombres normaux (qui se situent, en un certain sens, à l'exact opposé des nombres de complexité sous-linéaire dont il est question ci-dessous) construits par Champernowne [17], Davenport et Erdős [19], et par Bailey et Crandall [9]. Dans la partie 4.2, nous obtenons, comme conséquence d'une extension multidimensionnelle du théorème d'A. Baker, une mesure de transcendance des nombres extrémaux récemment définis par Roy [49, 50].

Un autre aspect important de la méthode que nous développons est qu'elle s'adapte parfaitement à l'étude des nombres réels dont le développement dans une base entière est en un certain sens « simple » : les nombres réels de complexité sous-linéaire (définition 5.2). La partie 5 de cet article est consacrée à cette classe de nombres qui contient de nombreux exemples classiques et abondamment étudiés comme les nombres lacunaires, les nombres automatiques et les nombres sturmiens. À l'aide d'une version p-adique du théorème du sous-espace de W. M. Schmidt, nous avons récemment établi [2] que ces nombres sont ou bien rationnels, ou bien transcendants. Nous poursuivons cette étude et montrons comment combiner l'approche de [2] avec celle développée dans le présent article afin de contrôler la qualité de l'approximation de tout nombre de complexité sous-linéaire par des nombres algébriques de degré fixé au moins égal à deux et, par conséquent, de préciser où il se situe dans la classification de Mahler [35], rappelée dans la partie 2. Ainsi, lorsqu'un nombre réel irrationnel ξ de complexité sous-linéaire n'est pas un nombre de Liouville (c'est-à-dire, lorsque l'exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$ est fini), nous établissons une mesure de transcendance de ξ qui implique qu'il s'agit soit d'un S-nombre, soit d'un T-nombre. Le problème se ramène donc à distinguer, parmi les nombres de complexité sous-linéaire, les nombres rationnels ou les nombres de Liouville de ceux qui n'en sont pas. Le fait qu'un nombre est rationnel se lit évidemment sur son développement dans une base entière b, puisque ce dernier est alors ultimement périodique. Pour distinguer les nombres de Liouville, nous introduisons un exposant combinatoire, l'*exposant diophantien*, qui s'interprète comme une mesure de la périodicité du développement de ξ en base b. Notons que des exposants similaires ont été introduits en combinatoire des mots et en dynamique symbolique, comme l'exposant critique ou l'exposant critique initial (voir par exemple [11]). Nous montrons alors comment cet exposant permet de contrôler l'approximation rationnelle des nombres de complexité sous-linéaire. En particulier, nous établissons qu'un tel nombre est un nombre de Liouville si, et seulement si, son exposant diophantien est infini. Nous appliquons ensuite ces résulats aux nombres lacunaires, aux nombres sturmiens et aux nombres automatiques. Dans chacun de ces cas, nous donnons des critères simples pour déterminer si l'exposant diophantien est fini ou non. Nous faisons ainsi un premier pas en direction d'une conjecture de Becker en démontrant que tout nombre automatique irrationnel est soit un S-nombre, soit un T-nombre. Ceci étend un résultat d'Adamczewski et Cassaigne [6] affirmant qu'un nombre automatique irrationnel ne peut pas être un nombre de Liouville. Nous généralisons également un théorème de Bundschuh [15] sur les nombres sturmiens.

Remerciements. Nous remercions Michel Waldschmidt d'avoir attiré notre attention sur la question traitée dans cet article suite à un exposé de l'un des auteurs au Groupe d'Étude sur les Problèmes Diophantiens de l'Institut Mathématiques de Jussieu.

2. Le théorème de Roth et ses extensions

Dans cette partie, nous rappelons le théorème de Roth, ainsi que certaines de ses généralisations multidimensionnelles établies par W. M. Schmidt. Nous énonçons également le résultat de Baker qui sert de point de départ à notre étude et peut se voir comme le prototype des résultats que nous souhaitons démontrer.

En 1955, Roth [48] établit que, comme presque tous les nombres réels, les nombres réels irrationnels algébriques ont un exposant d'irrationalité égal à 2.

Théorème R. (Roth, 1955). *Soient ξ un nombre réel et ε un nombre réel strictement positif. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels écrits sous forme irréductible, ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}\cdot \tag{2.1}$$

Alors, ξ est un nombre transcendant.

En 1964, A. Baker obtint une conclusion plus précise que la simple transcendance de ξ, pourvu que la suite infinie de ses très bonnes approximations rationnelles soit, en un certain sens, dense. Avant d'énoncer son théorème, nous rappelons la classification des nombres réels définie par Mahler [35] en 1932. Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel. On note $w_d(\xi)$ le supremum des nombres réels w pour lesquels les inégalités

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}$$

sont vérifiées par une infinité de polynômes $P(X)$ à coefficients entiers, de degré majoré par d. Ici, $H(P)$ désigne la hauteur naïve de $P(X)$, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Posant alors $w(\xi) = \limsup_{d\to+\infty}(w_d(\xi)/d)$, nous disons, suivant Mahler, que ξ est un

$$\begin{gathered}A\text{-nombre, si } w(\xi) = 0;\\ S\text{-nombre, si } 0 < w(\xi) < \infty;\\ T\text{-nombre, si } w(\xi) = \infty \text{ et } w_d(\xi) < \infty \text{ pour tout entier } d \geq 1;\\ U\text{-nombre, si } w(\xi) = \infty \text{ et } w_d(\xi) = \infty \text{ pour un entier } d \geq 1.\end{gathered}$$

Une propriété essentielle de cette classification est que deux nombres transcendants appartenant à des classes différentes sont algébriquement indépendants. Les A-nombres sont exactement les nombres algébriques. Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres réels sont des S-nombres. Les nombres de Liouville, qui sont par définition les nombres ξ vérifiant $w_1(\xi) = +\infty$ (observons que $w_1(\xi) = \mu(\xi) - 1$), sont des exemples de U-nombres, mais la confirmation de l'existence des T-nombres demeura un problème ouvert durant une quarantaine d'années, jusqu'à sa résolution par Schmidt [52, 53]. Davantage de résultats sur les fonctions w_d se trouvent dans la monographie [13]. Notons dès à présent que l'ensemble des U-nombres ξ se subdivise en une infinité dénombrable de sous-classes selon le plus petit entier d pour lequel $w_d(\xi)$ est infini.

Définition 2.1. *Soit $\ell \geq 1$ un entier. Un nombre réel ξ est un U_ℓ-nombre si, et seulement si, $w_\ell(\xi)$ est infini et $w_d(\xi)$ est fini pour $d = 1, \ldots, \ell - 1$.*

L'ensemble des U_1-nombres est exactement l'ensemble des nombres de Liouville.

Avec les notations ci-dessus, le résultat de Baker s'énonce ainsi.

Théorème B. (A. Baker, 1964). *Sous les hypothèses du théorème de Roth, si en outre la condition*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty \tag{2.2}$$

est vérifiée, alors il existe un nombre réel c, ne dépendant que de ξ et de ε, pour lequel

$$w_d(\xi) \leq \exp\exp cd^2, \tag{2.3}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Ce résultat répond pour l'essentiel de façon positive à la question posée dans la partie 1 dans le cas particulier où la transcendance d'un nombre réel se démontre à l'aide du théorème de Roth. Ainsi, lorsque δ est strictement supérieur à 1 dans l'exemple donné au début de la partie 1, le théorème de Baker permet, pour tout entier d, de contrôler l'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré au plus d, alors que l'approche élémentaire fondée sur l'utilisation d'inégalités triangulaires permet seulement de le faire pour les entiers d inférieurs à $1 + \delta$.

Les nombres rationnels p_n/q_n qui apparaissent dans les énoncés des théorèmes R et B sont supposés écrits sous forme irréductible. Cette hypothèse est superflue dans le cas du théorème R, mais nécessaire pour le théorème B. Précisément, si cette hypothèse est omise, la condition (2.2) entraîne que ξ est un nombre de Liouville, ou un S-nombre, ou un T-nombre. Des explications complémentaires figurent au début de la partie 9.

Le théorème de Roth fut par la suite généralisé dans de nombreuses directions. La plupart des résultats connus relèvent du théorème du sous-espace établi en 1972 par W. M. Schmidt [54], ou plus exactement de sa généralisation aux corps de nombres incluant des valeurs absolues p-adiques. Nous rappelons ci-dessous deux énoncés importants démontrés en 1970 par W. M. Schmidt [51], qui sont des cas particuliers du théorème du sous-espace.

Le premier résultat concerne l'approximation rationnelle simultanée des puissances d'un nombre réel. Rappelons que $\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche.

Théorème S1. (W. M. Schmidt, 1970). *Soient ξ un nombre réel et $r \geq 1$ un entier tels que $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^r$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n \geq 1}$ tels que*

$$\|q_n \xi\| \cdot \|q_n \xi^2\| \cdots \|q_n \xi^r\| < \frac{1}{q_n^{1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Alors, le nombre ξ est transcendant.

Le second énoncé est une généralisation du théorème de Roth au cas de l'approximation d'un nombre réel par des nombres algébriques de degré borné. La hauteur $H(\alpha)$ d'un nombre algébrique α est le maximum des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal.

Théorème S2. (W. M. Schmidt, 1970). *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres algébriques distincts de degré au plus r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|\xi - \alpha_n| < \frac{1}{H(\alpha_n)^{r+1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Alors, le nombre ξ est transcendant.

Le théorème de Roth correspond au cas $r = 1$ des théorèmes S1 et S2.

3. Extension p-adique du théorème de Baker et applications

Cette partie est consacrée, dans un premier temps, à l'énoncé d'une extension p-adique du théorème B, puis, dans un second temps, à des applications de ce nouveau résultat, notamment aux nombres normaux construits par Champernowne [17], Davenport et Erdős [19] et par Bailey et Crandall [9].

3.1. Extension p-adique du théorème de Baker

En 1957, Ridout [47] étendit le théorème R en incluant des valuations p-adiques. Dans toute la suite, pour tout nombre premier ℓ et tout nombre rationnel x, on pose $|x|_\ell := \ell^{-u}$, où u est l'exposant de ℓ dans la décomposition de x en produit de facteurs premiers. En outre, on pose $|0|_\ell = 0$. Avec ces notations, le résultat principal de [47] s'énonce comme suit.

Théorème Ri. (Ridout, 1957). *Soient ξ un nombre réel, ε un nombre réel strictement positif et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers distincts. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n \geq 1}$ de rationnels écrits sous forme irréductible, ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_n|_\ell \cdot |q_n|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}.$$

Alors, ξ est un nombre transcendant.

Le résultat principal de cette partie est une généralisation commune des théorèmes B et Ri, et améliore la mesure de transcendance donnée par le théorème B.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses du théorème Ri, si en outre la condition*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty$$

est vérifiée, alors il existe un nombre réel c, ne dépendant que de ξ et de ε, tel que

$$w_d(\xi) \le (2d)^{c \log\log 3d}, \tag{3.1}$$

pour tout entier $d \ge 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

L'intérêt du théorème 3.1 réside principalement dans la nouveauté de sa démonstration, bien plus simple que celle de Baker, laquelle reprend pas à pas la démonstration de Roth, en y incorporant une idée nouvelle. Notre démonstration possède également l'avantage de se prêter sans trop de difficultés techniques à des généralisations multidimensionnelles, énoncées dans la partie 4.1. Notons qu'il est possible, en combinant les démonstrations de [47] et [10], d'établir le théorème 3.1, avec, cependant, la majoration $w_d(\xi) \le \exp\exp\{cd^2\}$ au lieu de (3.1).

La démonstration du théorème 3.1 est très flexible dans le sens où, sous les hypothèses du théorème de Roth, si φ est une fonction telle que $q_{n+1} \le \varphi(q_n)$ pour tout $n \ge 1$, alors nous pouvons en déduire une mesure de transcendance pour ξ, laquelle s'exprime aisément en fonction de φ. Naturellement, cette mesure sera d'autant moins fine que φ croît rapidement. Un énoncé précis figure à la fin de la partie 8.

3.2. Nombres normaux et classification de Mahler

Soit $b \ge 2$ un entier. Un nombre réel ξ est dit normal en base b si, pour tout entier k, chaque bloc de k chiffres apparaît dans le développement en base b de ξ avec une fréquence égale à $1/b^k$. Émile Borel [12] établit en 1909 que presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en toute base entière ; toutefois, à ce jour, nous ne connaissons aucun exemple naturel de tel nombre. Les nombres Ω de Chaitin, qui sont définis comme « les probabilités d'arrêt des machines de Turing universelles à programmes autodélimités » (voir [16]), sont bien des exemples explicites de nombres normaux en toute base entière, mais leur définition nous semble interdire le qualificatif d'« exemple naturel ». En 1933, Champernowne [17] montra que le nombre

$$\zeta_{10,X} = 0.12345678910111213 14\ldots,$$

dont la suite des chiffres décimaux est la concaténation de la suite formée de tous les entiers classés par ordre croissant, est normal en base 10. Quatre années plus tard, Mahler [36] montra que $\zeta_{10,X}$ est transcendant mais n'est pas un nombre de Liouville, puis il généralisa ce résultat de la façon suivante.

Soit $P(X)$ un polynôme non constant tel que $P(n)$ est un entier strictement positif pour tout $n \geq 1$. Soit $b \geq 2$ un entier. Pour tout entier positif x, notons $(x)_b$ la suite des chiffres de x écrit en base b. Ainsi, $(x)_b$ est un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, g-1\}$. Considérons le nombre réel

$$\zeta_{b,P(X)} = 0.(P(1))_b(P(2))_b \ldots$$

en base b. Mahler [37] établit que $\zeta_{b,P(X)}$ est transcendant, et n'est pas un nombre de Liouville. En outre, le résultat de Champernowne fut généralisé en 1952 aux nombres réels $\zeta_{b,P(X)}$ par Davenport et Erdős [19]. Ainsi, nous disposons d'une famille de nombres normaux, transcendants, et qui ne sont pas des nombres de Liouville.

Par la suite, Baker [10] raffina le résultat de Mahler [36] en montrant que $\zeta_{10,X}$ n'est pas un U-nombre. Sous certaines hypothèses additionnelles sur b et sur le degré de $P(X)$, la méthode de Baker entraîne que $\zeta_{b,P(X)}$ n'est pas un U-nombre, mais elle ne permet pas de traiter le cas de tous les nombres de cette forme. Le théorème 3.1 entraîne que ces hypothèses additionnelles sont superflues.

Théorème 3.2. *Pour tout entier $b \geq 2$ et tout polynôme $P(X)$ comme ci-dessus, le nombre réel $\zeta_{b,P(X)}$ est normal en base b, et c'est soit un S-nombre, soit un T-nombre.*

Par la suite, Mahler [39] établit la transcendance d'une autre classe de nombres réels, qui inclut les $\zeta_{b,X}$. Le théorème 3.1 entraîne que ces nombres ne sont pas des U-nombres. Il s'applique également aux nombres

$$\xi_{b,c,d} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{c^k b^{d^k}},$$

définis pour tous entiers b, c, d avec $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d > \sqrt{c}$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$. Bailey et Crandall [9] ont démontré que $\xi_{b,c,d}$ est normal en base b. Il découle du théorème Ri que $\xi_{b,c,d}$ est transcendant, et le théorème 3.1 implique le résultat plus précis suivant.

Théorème 3.3. *Soient b, c, d des entiers tels que $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d > \sqrt{c}$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$. Alors, le nombre réel $\xi_{b,c,d}$ est normal en base b et c'est soit un S-nombre, soit un T-nombre.*

Les démonstrations qui conduisent à la transcendance des nombres figurant dans les théorèmes 3.2 et 3.3 mettent clairement en évidence des suites de nombres rationnels vérifiant les hypothèses du théorème 3.1. Nous ne donnons donc pas le détail des démonstrations de ces deux théorèmes.

4. Extensions multidimensionnelles du théorème de Baker et applications

Nous présentons trois généralisations multidimensionnelles du théorème B, puis en donnons des applications.

4.1. Extensions multidimensionnelles du théorème de Baker

Nous précisons tout d'abord la conclusion du théorème S1 lorsque la suite d'approximations rationnelles est suffisamment dense.

Théorème 4.1. *Soient $r \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel tel que $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^r$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n\geq 1}$ tels que*

$$\|q_n\xi\| \cdot \|q_n\xi^2\| \cdots \|q_n\xi^r\| < \frac{1}{q_n^{1+\varepsilon}}, \tag{4.1}$$

pour tout entier $n \geq 1$. Supposons de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty. \tag{4.2}$$

Alors, soit ξ est un U_ℓ-nombre pour un certain entier $\ell \leq r$, soit il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^2(\log\log 3d)\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, dans le dernier cas, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Le résultat suivant affine un autre énoncé classique produit par le théorème du sous-espace (voir par exemple [55], Chap. VI, Corollary 1E). Rappelons qu'un polynôme à coefficients entiers est dit primitif si le pgcd de ses coefficients est égal à 1.

Théorème 4.2. *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients entiers et de degré au plus r. Supposons que ξ n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à r et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$0 < |P_n(\xi)| < \frac{1}{H(P_n)^{r+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Supposons de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log H(P_{n+1})}{\log H(P_n)} < +\infty.$$

Alors ξ est ou bien un U_ℓ-nombre pour un certain entier $\ell \leq r$, ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre. En outre, si les polynômes $P_n(X)$, $n \geq 1$, sont primitifs et irréductibles, ou bien s'il existe un nombre réel w tel que

$$|P_n(\xi)| > H(P_n)^{-w}, \quad \text{pour } n \geq 1,$$

alors il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^r(\log\log 3d)^r\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Le corollaire suivant précise le théorème S2 lorsque la suite d'approximations $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est suffisamment dense. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 4.2, lorsque ce dernier est appliqué à la suite des polynômes minimaux des nombres algébriques α_n.

Corollaire 4.3. *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres algébriques distincts de degré au plus égal à r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|\xi - \alpha_n| < \frac{1}{H(\alpha_n)^{r+1+\varepsilon}}, \tag{4.3}$$

pour tout entier $n \geq 1$. Supposons de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log H(\alpha_{n+1})}{\log H(\alpha_n)} < +\infty. \tag{4.4}$$

Alors, il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^r(\log\log 3d)^r\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Le corollaire 4.3 généralise le théorème B à l'approximation par des nombres algébriques de degré borné.

4.2. Exposants d'approximation diophantienne, nombres extrémaux de Roy, et classification de Mahler

Suivant les notations de Bugeaud et Laurent [14], pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout nombre réel ξ, on désigne par $\hat{w}_d(\xi)$ le supremum des nombres réels w tels que, pour tout réel X suffisamment grand, les inégalités

$$0 < |x_d\xi^d + \ldots + x_1\xi + x_0| \leq X^{-w}, \qquad \max_{0\leq m\leq d} |x_m| \leq X,$$

ont une solution en entiers $x_0, \ldots, x_d$. Le lecteur est invité à consulter [14] pour un survol des résultats connus sur les fonctions $\hat{w}_d$. Mentionnons cependant que $\hat{w}_1(\xi) = 1$ pour tout nombre irrationnel ξ et que $\hat{w}_d(\xi) \geq d$ si ξ n'est pas algébrique de degré au plus égal à d. Roy [49, 50] fut le premier à prouver l'existence de nombres réels ξ vérifiant $\hat{w}_2(\xi) > 2$; toutefois, nous ignorons s'il existe un entier $d \geq 3$ et un nombre réel ξ tels que $\hat{w}_d(\xi) > d$. Le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème 4.2, contribue à situer un tel nombre ξ dans la classification de Mahler.

Théorème 4.4. *Soient d un entier et ξ un nombre réel tels que $\hat{w}_d(\xi) > d$. Alors, ξ est ou bien un U_ℓ-nombre pour un certain $\ell \leq d$, ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.*

Au vu de l'article de Laurent [28], il semble difficile d'améliorer la conclusion de ce théorème, et en particulier d'exclure le fait que ξ puisse être un U-nombre.

D'autres exposants d'approximation uniforme sont définis dans [14], à savoir les exposants $\hat{w}_d^*$ et $\hat{\lambda}_d$. Si un nombre réel ξ vérifie $\hat{w}_d^*(\xi) > d$ ou bien $\hat{\lambda}_d(\xi) > 1/d$, alors il vérifie en particulier $\hat{w}_d(\xi) > d$, et le théorème 4.4 s'applique.

En 2003, Roy [49, 50] a démontré que la mesure d'approximation simultanée pour un nombre réel ξ (qui n'est ni rationnel, ni quadratique) et son carré établie par Davenport et Schmidt [21] ne peut être améliorée. Les nombres ξ pour lesquels cette mesure est optimale sont appelés, selon sa terminologie, les nombres extrémaux. Ils vérifient $\hat{w}_2(\xi) = (3+\sqrt{5})/2 > 2$ et forment un ensemble infini dénombrable.

Définition 4.5. *Un nombre réel irrationnel ξ qui n'est pas quadratique est un nombre extrémal s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $X \geq 1$, les inégalités*

$$0 < x_0 \leq X, \quad |x_0\xi - x_1| \leq cX^{-(\sqrt{5}-1)/2}, \quad |x_0\xi^2 - x_2| \leq cX^{-(\sqrt{5}-1)/2}$$

admettent une solution en entiers x_0, x_1, x_2.

Roy a observé que, comme conséquence du théorème du sous-espace, les nombres extrémaux sont transcendants. Plus précisément, le théorème 5.4.2 de [50] montre qu'à tout nombre extrémal ξ est associée une suite de nombres quadratiques $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (4.3) et (4.4). Ainsi, le corollaire 4.3 s'applique et nous permet d'établir une mesure de transcendance de ξ.

Théorème 4.6. *Pour tout nombre extrémal ξ et tout entier $d \geq 1$, il existe une constante c indépendante de d telle que*

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^2(\log\log 3d)^2\}.$$

En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Notons que Roy [50] a également établi une mesure d'irrationalité fine des nombres extrémaux qui implique que leur exposant d'irrationalité est égal à 2. Plus précisément, étant donné un nombre extrémal ξ, il existe des constantes $c > 0$ et $t \geq 0$, ne dépendant que de ξ, telles que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^2(1+\log q)^t},$$

pour tout nombre rationnel p/q.

Par la suite, Bugeaud et Laurent [14] ont complété les travaux de Roy, en calculant explicitement certains exposants d'approximation diophantienne associés aux fractions continues sturmiennes caractéristiques, dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Soient $(s_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers ≥ 1 et $\{a, b\}$ un alphabet à deux lettres. On désigne par $\{a, b\}^*$ le monoïde des mots correspondant et on définit inductivement une suite de mots $(m_k)_{k\geq 0}$ de $\{a, b\}^*$ par les formules

$$m_0 = b, \quad m_1 = b^{s_1-1}a \quad \text{et} \quad m_{k+1} = m_k^{s_{k+1}}\, m_{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

Cette suite converge (pour la topologie produit des topologies discrètes) dans le complété $\{a, b\}^* \cup \{a, b\}^{\mathbf{N}}$ vers le mot infini

$$m_\varphi := \lim_{k\to\infty} m_k = b^{s_1-1}a\ldots,$$

qui est communément appelé mot sturmien caractéristique d'angle (ou de « pente »)

$$\varphi := [0; s_1, s_2, s_3, \ldots]$$

construit sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Le nombre réel $\xi_{(\sqrt{5}-1)/2} = [0; m_{(\sqrt{5}-1)/2}]$, dont les quotients partiels sont 0, puis les lettres du mot infini $m_{(\sqrt{5}-1)/2}$, est un nombre extrémal [49], et donc transcendant. Plus généralement, Allouche, Davison, Queffélec et Zamboni [7] ont démontré que, pour tout nombre irrationnel φ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, le nombre ξ_φ est transcendant.

L'étude menée dans la partie 6 de [14] montre que $\hat{w}_2(\xi_\varphi) > 2$ et $w_2(\xi_\varphi) < +\infty$ lorsque la suite $(s_k)_{k\geq 1}$ est bornée, tandis que $w_2(\xi_\varphi)$ est infini lorsque cette suite n'est pas bornée. Le théorème 4.4 implique donc le résultat suivant.

Théorème 4.7. *Avec les notations ci-dessous, si a et b sont des entiers positifs et distincts, alors le nombre ξ_φ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre si la suite $(s_k)_{k\geq 1}$ est bornée, et c'est un U_2-nombre dans le cas contraire.*

Dans un travail ultérieur [4], nous présenterons une autre démonstration du théorème 4.7, comme cas particulier d'un résultat général établissant des mesures de transcendance pour certaines familles de fractions continues.

5. Nombres réels de complexité sous-linéaire

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'approximation des nombres réels de complexité sous-linéaire par des nombres algébriques. Cette étude est motivée par la question suivante.

Question 5.1. *Les propriétés d'approximation algébrique d'un nombre réel se lisent-elles sur son développement décimal (ou plus généralement sur son développement dans une base entière) ?*

Jusqu'à présent, nous disposons de peu d'éléments de réponse, outre l'observation banale qu'un nombre est rationnel si, et seulement si, son développement en base entière est ultimement périodique. Cependant, si l'on se restreint aux nombres irrationnels ξ ayant un développement de complexité sous-linéaire dans une base entière, nous démontrons qu'ou bien ξ est un S- ou un T-nombre, ou bien ξ est un nombre de Liouville et, dans ce cas, cela «se lit» sur son développement grâce aux occurrences précoces de répétitions arbitrairement longues.

5.1. Complexité des nombres réels et mesures de transcendance

Avant d'énoncer nos résultats, il est nécessaire de définir précisément le développement en base entière d'un nombre réel et sa complexité.

La fonction complexité d'une suite $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ prenant ses valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{A}$ est la fonction $n \mapsto p(n, \mathbf{a})$ définie par

$$p(n, \mathbf{a}) = \mathrm{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+n-1}) : j \geq 1\}.$$

Clairement, elle vérifie

$$1 \leq p(n, \mathbf{a}) \leq (\mathrm{Card}\,\mathcal{A})^n, \quad (n \geq 1).$$

La suite $\mathbf{a}$ est *de complexité sous-linéaire* si

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p(n, \mathbf{a})}{n} < +\infty.$$

Notons que la fonction de complexité d'une suite est bornée si, et seulement si, celle-ci est ultimement périodique. Il s'agit d'un resultat classique de Morse et Hedlund [42].

Soit $b \geq 2$ un entier. Tout nombre réel non nul ξ s'écrit de manière unique

$$\xi = \pm \sum_{k \geq -k_0} \frac{a_k}{b^k},$$

où $k_0 \geq 0$, $a_{-k_0} \neq 0$ si $k_0 > 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ et $a_k \neq b-1$ pour une infinité d'indices k. Cette écriture s'appelle *le développement de ξ en base b*. Le nombre réel ξ est *de complexité sous-linéaire en base b* si la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite de complexité sous-linéaire.

Définition 5.2. *Le nombre réel ξ est de complexité sous-linéaire s'il existe un entier $b \geq 2$ tel que ξ est de complexité sous-linéaire en base b.*

Comme nous l'avons mentionné au cours de l'introduction, nous disposons depuis peu du résultat suivant [2]. Il découle d'un nouveau critère combinatoire de transcendance [5], dont la démonstration repose sur une version p-adique du théorème du sous-espace.

Théorème AB. *Tout nombre réel de complexité sous-linéaire est ou bien rationnel, ou bien transcendant.*

L'approche développée dans cet article nous permet de préciser le théorème AB de la façon suivante, apportant ainsi un premier élément de réponse à la question 5.1.

Théorème 5.3. *Tout nombre réel irrationnel ξ de complexité sous-linéaire est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre, ou bien un nombre de Liouville. Plus précisément, si ξ n'est pas un nombre de Liouville, alors il existe une constante effective c, ne dépendant que de ξ, telle que*

$$w_d(\xi) \leq (2d)^{c(\log 3d)(\log\log 3d)},$$

pour tout entier $d \geq 1$.

Ce résultat traduit le fait que l'on contrôle de manière assez satisfaisante l'approximation d'un nombre réel de complexité sous-linéaire par des nombres algébriques de degré fixé supérieur ou égal à 2. Pour compléter cette étude, il reste à considérer la qualité de ses approximations rationnelles. De façon assez surprenante, le fait qu'un nombre de complexité sous-linéaire en base b soit ou non un nombre de Liouville peut en fait se lire sur son développement (en base b). L'objet de la partie suivante est précisément de décrire ce phénomène.

5.2. Exposant diophantien et approximation rationnelle

Comme nous l'avons déjà mentionné, le fait qu'un nombre est rationnel se lit évidemment sur son développement en base b, puisque ce dernier est alors ultimement périodique. Pour distinguer les nombres de Liouville parmi les nombres de complexité sous-linéaire, nous utilisons l'*exposant diophantien*, introduit dans [3]. Cet exposant s'interprète comme une mesure de la périodicité du développement de ξ en base b. Nous montrons comment il permet de contrôler l'approximation rationnelle des nombres réels de complexité sous-linéaire, complétant ainsi le théorème 5.3.

Avant de définir l'exposant diophantien d'une suite ou d'un mot infini, faisons quelques rappels de combinatoire des mots, qui nous seront également utiles dans les parties 10 et 11.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. On note $|W|$ la longueur d'un mot fini W sur l'alphabet $\mathcal{A}$, c'est-à-dire le nombre de lettres composant W. Pour tout entier $\ell \geq 1$, le mot W^ℓ désigne la concaténation de ℓ copies de W. Plus généralement, pour tout nombre réel $x > 0$, on note W^x le mot $W^{\lfloor x \rfloor}W'$, où W' est le préfixe de W de longueur $\lceil (x - \lfloor x \rfloor)|W| \rceil$. Ici et dans toute la suite, $\lceil y \rceil$ (resp. $\lfloor y \rfloor$) désigne le plus petit entier supérieur ou égal à y (resp. le plus grand entier inférieur ou égal à y). Le mot W^∞ est le mot infini obtenu par concaténations successives du mot W.

Soit $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, que l'on identifie au mot infini $a_1a_2\dots$ Soit $\rho \geq 1$ un nombre réel. On dit que $\mathbf{a}$ vérifie la Condition $(*)_\rho$ s'il existe deux suites de mots finis $(U_n)_{n\geq 1}$, $(V_n)_{n\geq 1}$, et une suite de nombres réels $(w_n)_{n\geq 1}$ telles que :

(i) pour $n \geq 1$, le mot $U_nV_n^{w_n}$ est un préfixe du mot $\mathbf{a}$;
(ii) pour tout $n \geq 1$, $|U_nV_n^{w_n}|/|U_nV_n| \geq \rho$;
(iii) la suite $(|V_n^{w_n}|)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

L'*exposant diophantien* de $\mathbf{a}$, noté $\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ est le supremum des nombres réels ρ pour lesquels $\mathbf{a}$ vérifie la Condition $(*)_\rho$. Il est clair à partir de la définition que

$$1 \leq \mathrm{Dio}(\mathbf{a}) \leq +\infty$$

et que l'exposant diophantien d'une suite ultimement périodique est infini.

Pour tout entier $b \geq 2$, notons $\mathrm{Dio}(\xi, b)$ l'exposant diophantien du développement de ξ en base b. En tronquant ce développement puis en le complétant par périodicité, on construit ainsi de bonnes approximations rationnelles de ξ qui nous permettent aisément de minorer l'exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$ de ξ et d'établir, lorsque ξ est irrationnel, que

$$\mu(\xi) \geq \mathrm{Dio}(\xi, b). \tag{5.1}$$

En revanche, ce raisonnement très simple n'est a priori d'aucune aide pour majorer $\mu(\xi)$, sauf, cependant, lorsque ξ est de complexité sous-linéaire, comme l'illustre le résultat suivant.

Théorème 5.4. *Soit $b \geq 2$ un entier. Soient $c > 1$ un nombre entier et $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ telle que $p(n, \mathbf{a}) \leq cn$ pour tout entier n assez grand. Si l'exposant diophantien de $\mathbf{a}$ est fini, alors le nombre réel*

$$\xi := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^k}$$

vérifie

$$\max\{2, \mathrm{Dio}(\xi, b)\} \leq \mu(\xi) \leq (2c+1)^3(\mathrm{Dio}(\xi, b) + 1). \tag{5.2}$$

L'inégalité de gauche de (5.2) découle de (5.1) et du fait que l'exposant d'irrationalité de tout nombre irrationnel est au moins égal à 2.

Nous déduisons du théorème 5.4 une caractérisation combinatoire des nombres de Liouville de complexité sous-linéaire en base b.

Corollaire 5.5. *Soient $b \geq 2$ un entier et ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b. Alors, ξ est un nombre de Liouville si, et seulement si,* $\mathrm{Dio}(\xi, b) = +\infty$.

Ainsi, la lecture «naïve» du développement d'un nombre réel de complexité sous-linéaire nous permet de déterminer s'il s'agit ou non d'un nombre de Liouville.

5.3. Applications aux nombres lacunaires, automatiques et sturmiens

Dans cette partie, nous donnons quelques conséquences des résultats précédents pour trois familles classiques de nombres de complexité sous-linéaire : les nombres lacunaires, les nombres automatiques et les nombres sturmiens. Dans chacun de ces cas, nous décrivons des critères simples pour déterminer si l'exposant diophantien des nombres considérés est fini ou non.

Nombres lacunaires. Par définition, un nombre réel ξ est un nombre lacunaire si son développement dans une base entière $b \geq 2$ s'écrit

$$\xi := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{b^{u_n}},$$

où $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Par exemple, le célèbre nombre de Liouville

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{n\,!}}$$

est un nombre lacunaire. Le fait que les nombres lacunaires sont des nombres de complexité sous-linéaire est une observation assez simple (voir par exemple [26]), et le théorème Ri implique qu'ils sont transcendants, un résultat que les énoncés ci-dessus permettent de préciser.

Théorème 5.6. *Un nombre lacunaire*

$$\xi := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{b^{u_n}}$$

est un nombre de Liouville si, et seulement si, la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée. De plus, si cette suite est bornée, alors ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Pour démontrer le théorème 5.6, il suffit de constater que l'exposant diophantien du développement en base b de ξ est égal à $\limsup_{n \to +\infty} u_{n+1}/u_n$, puis d'appliquer le théorème 5.3 et le corollaire 5.5.

Nombres automatiques. Les nombres réels automatiques sont les nombres réels dont le développement dans une base entière est engendré par un automate fini (voir [8], Chapter 13). Comme conséquence d'un résultat de Cobham [18], ils forment une sous-classe des nombres de complexité sous-linéaire. Le théorème AB implique en particulier qu'un nombre réel automatique est rationnel ou transcendant, confirmant une conjecture proposée par Cobham en 1968 et popularisée par les travaux de Loxton et van der Poorten [32, 33]. En 1993, Shallit conjectura qu'un nombre de Liouville ne peut être engendré par un automate fini. En fait, une conjecture plus forte fut par la suite formulée par Becker dans sa correspondance avec Shallit.

Conjecture 5.7. (Becker). *Les nombres automatiques irrationnels sont des S-nombres.*

Dans la direction de la conjecture 5.7, Nishioka [45] établit que le nombre automatique $\sum_{n\geq 1} 2^{-2^n}$ est un S-nombre. La conjecture de Shallit a récemment été démontrée par Adamczewski et Cassaigne [6], lesquels au moyen du théorème de Baker rappelé dans la partie 2, ont également établi que les nombres automatiques ne sont pas des U-nombres s'ils vérifient une hypothèse additionnelle.

Comme conséquence des résultats de [6] et du théorème 5.3, nous faisons un premier pas dans la direction de la conjecture de Becker.

Théorème 5.8. *Tout nombre réel irrationnel automatique est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.*

Nombres sturmiens. Les suites sturmiennes sont les suites $\mathbf{a}$ de complexité minimale parmi les suites apériodiques, c'est-à-dire celles qui vérifient $p(n, \mathbf{a}) = n + 1$ pour tout entier positif n. Depuis les travaux précurseurs de Morse et Hedlund [42, 43], elles sont l'objet de nombreuses études (voir par exemple [30] pour une introduction à ce sujet). Un nombre sturmien est un nombre réel dont le développement dans une base entière est une suite sturmienne. Il découle de l'une des nombreuses caractérisations des suites sturmiennes qu'un nombre est sturmien si, et seulement si, il est de la forme

$$S_b(\alpha, \rho) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha+\rho \rfloor}}$$

ou bien

$$S'_b(\alpha, \rho) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{b^{\lceil n\alpha+\rho \rceil}},$$

avec $b \geq 2$ entier, $\alpha > 1$ irrationnel et $\rho \geq 0$.

Notons que les propriétés dont il est question ci-dessous (transcendance, mesure de transcendance, mesure d'irrationalité) sont clairement identiques pour $S_b(\alpha, \rho)$ et $S'_b(\alpha, \rho)$. Mahler [34] établit la transcendance de $S_b(\alpha, 0)$ pour α quadratique, un résultat étendu par Loxton et van der Poorten [31] à tout nombre α irrationnel, également au moyen de la méthode de Mahler. D'autre part, il est bien connu que le paramètre ρ est une source de difficultés. Ainsi, il a fallu attendre 1997 pour que Ferenczi et Mauduit [24] démontrent la transcendance de tous les nombres sturmiens en utilisant une approche complètement différente fondée sur le théorème de Ridout. Nous précisons leur résultat en généralisant un théorème établi en 1980 par Bundschuh [15] correspondant au cas particulier où $\rho = 0$ dans le théorème 5.9.

Théorème 5.9. *Soient $b \geq 2$ un entier, $\alpha > 1$ un nombre irrationnel et $\rho > 0$ un nombre réel. Le nombre réel*

$$S_b(\alpha, \rho) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}}$$

est un nombre de Liouville si, et seulement si, α est nombre à quotients partiels non bornés. De plus, si α est un nombre à quotients partiels bornés, alors $S_b(\alpha, \rho)$ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Ce théorème découle du théorème 5.3 et du fait, démontré dans la partie 12, que $\mathrm{Dio}(S_b(\alpha, \rho), b)$ est fini si, et seulement si, α est un nombre à quotients partiels bornés. Comme conséquence du théorème 5.9 et des propriétés de la classification de Mahler, nous construisons des exemples explicites de nombres réels algébriquement indépendants.

Corollaire 5.10. *Soient $b \geq 2$ un entier, $\alpha > 1$ un nombre réel irrationnel à quotients partiels non bornés, $\alpha' > 1$ un nombre réel irrationnel à quotients partiels bornés, ρ et ρ' deux nombres réels strictement positifs. Alors, les nombres réels*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha + \rho \rfloor}} \ \textit{et} \ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha' + \rho' \rfloor}}$$

sont algébriquement indépendants.

En particulier, les nombres

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor ne + \pi \rfloor}} \ \text{et} \ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\sqrt{2} + \zeta(3) \rfloor}}$$

sont algébriquement indépendants.

Notons enfin que l'exposant diophantien permet parfois d'obtenir la valeur exacte de l'exposant d'irrationalité du nombre considéré. Ainsi, dans le cas des nombres sturmiens $S_b(\alpha, 0)$, on peut démontrer la jolie égalité suivante (voir [1]) :

$$\mu\left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^{\lfloor n\alpha \rfloor}}\right) = \mathrm{Dio}(S_b(\alpha, 0), b) = 1 + \limsup_{n \to +\infty} [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1],$$

où $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

6. Le théorème du sous-espace quantitatif

Le théorème de Roth est ineffectif, dans le sens où, étant donnés $\varepsilon > 0$ et un nombre réel algébrique irrationnel ξ, on ne dispose d'aucune majoration explicite du dénominateur des solutions de l'inégalité

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \cdot \tag{6.1}$$

Néanmoins, il est possible de majorer le nombre de solutions de (6.1), ainsi que le firent Davenport et Roth [20] en 1955. Par la suite, leur résultat fut considérablement amélioré à plusieurs reprises. À ce jour, les meilleures majorations figurent dans les articles d'Evertse [22] et de Locher [29].

Théorème EL. *Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre algébrique réel de degré d et de hauteur H vérifiant $0 < \xi < 1$. Soient $\mathcal{S}$ un ensemble fini de s nombres premiers distincts et ε un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1/5$. L'inégalité*

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p|_\ell \cdot |q|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \tag{6.2}$$

possède au plus

$$e^{7s+26} \varepsilon^{-s-5} \log(6d) \cdot \log\bigl(\varepsilon^{-1} \log(6d)\bigr) \tag{6.3}$$

solutions rationnelles p/q (sous forme irréductible) telles que $q \geq \max\{4^{4/\varepsilon}, \sqrt{d+1}\, H\}$. En outre, si $\mathcal{S}$ est vide, alors (6.3) peut être remplacé par

$$2 \cdot 10^7\, \varepsilon^{-3} (\log \varepsilon^{-1})^2\, (\log 4d)\, (\log\log 4d). \tag{6.4}$$

Démonstration. Le Theorem 2 de [29] entraîne (6.3), tandis que (6.4) est une conséquence de l'estimation établie par Evertse à la fin du paragraphe 6 de [22]. □

À l'exception du théorème 3.1, les principaux résultats du présent article reposent sur une version quantitative du théorème du sous-espace p-adique, le théorème ES ci-dessous, que nous extrayons d'un article d'Evertse et Schlickewei [23]. Avant d'énoncer ce résultat, nous rappelons la définition de la hauteur d'un élément de $\mathbf{Z}^m$.

Soient $m \geq 2$ un entier et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de $\mathbf{Z}^m$. La hauteur du point $\mathbf{x}$ est définie par

$$H(\mathbf{x}) = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}. \tag{6.5}$$

Par définition, le vecteur $\mathbf{x}$ est primitif si ses coordonnées n'ont pas de diviseur premier en commun.

Nous renvoyons le lecteur à [23] pour la définition de $H(L)$, la hauteur de la forme linéaire L à coefficients algébriques ; cette notion n'intervient qu'au cours de la démonstration du théorème 5.3, et nous donnons alors les explications nécessaires. Notons que la notion de hauteur d'un m-uplet d'entiers utilisée dans [23] est différente de celle donnée en (6.5). L'énoncé du théorème ES est adapté en conséquence.

Théorème ES. *Soit $m \geq 2$ un entier. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de s nombres premiers distincts. Soit $L_{1,\infty}, \ldots, L_{m,\infty}$ un système linéairement indépendant de formes linéaires à m variables et à coefficients algébriques réels et soit d le degré du corps de nombres engendré par leurs coefficients. Pour tout nombre premier ℓ appartenant à $\mathcal{S}$, soit $L_{1,\ell}, \ldots, L_{m,\ell}$ un système linéairement indépendant de formes linéaires à m variables et à coefficients entiers rationnels. On suppose en outre que*

$$det(L_{1,\infty}, \ldots, L_{m,\infty}) = \pm 1,$$

et

$$det(L_{1,\ell}, \ldots, L_{m,\ell}) = \pm 1,$$

pour tout $\ell \in \mathcal{S}$. *Soit* H *un majorant de la hauteur des formes linéaires* $L_{i,v}$, *où* $1 \le i \le m$ *et* $v \in \mathcal{S} \cup \{\infty\}$. *Soit* ε *un nombre réel vérifiant* $0 < \varepsilon < 1$. *Alors, l'ensemble des vecteurs* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ *primitifs appartenant à* $\mathbf{Z}^m$ *qui sont solutions de l'inégalité*

$$\prod_{i=1}^{m} |L_{i,\infty}(\mathbf{x})| \cdot \prod_{\ell \in S} \prod_{i=1}^{m} |L_{i,\ell}(\mathbf{x})|_\ell < \, H(\mathbf{x})^{-\varepsilon}$$

et vérifient

$$H(\mathbf{x}) > \max\{m^{4m/\varepsilon}, H\}$$

se trouve dans une union finie d'au plus

$$(6m)^{2m(s+1)} \, 2^{3(m+10)^2} \, \varepsilon^{-ms-2m-4} \, (\log 4d) \, (\log\log 4d) \tag{6.6}$$

sous-espaces propres de $\mathbf{Q}^m$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du Theorem 3.1 de Evertse et Schlickewei [23]. □

La qualité des mesures de transcendance que nous obtenons dans nos différents théorèmes dépend étroitement de la qualité de la dépendance en d dans (6.3), (6.4) et (6.6). De ce point de vue, le théorème EL est très satisfaisant, dans la mesure où le Theorem 4 de Mueller et Schmidt [44] entraîne qu'il est optimal au facteur $(\log\log 4d)$ près.

7. Résultats auxiliaires

Soient $d \ge 1$ un entier et ξ un nombre réel. Suivant Koksma [27], on note $w_d^*(\xi)$ le supremum des nombres réels w^* pour lesquels les inégalités

$$0 < |\xi - \alpha| \le H(\alpha)^{-w^*-1}$$

sont vérifiées par une infinité de nombres algébriques α de degré majoré par d. De la même manière que Mahler définit les classes A, S, T et U à l'aide des fonctions w_d, Koksma introduisit les classes A^*, S^*, T^* et U^*. Ces dernières coïncident en fait avec les classes A, S, T et U, comme l'implique le lemme suivant.

Lemme 7.1. *Soit* $d \ge 1$ *un entier. Pour tout nombre réel irrationnel* ξ *on a*

$$\frac{w_d(\xi) + 1}{2} \le w_d^*(\xi) \le w_d(\xi).$$

En particulier, $w_d(\xi)$ *est fini si, et seulement si,* $w_d^*(\xi)$ *est fini.*

Démonstration. L'inégalité de gauche est un résultat de Wirsing [56], tandis que celle de droite est banale. □

Nous avons besoin d'une version de l'inégalité de Liouville.

Lemme 7.2. *Soient α et β deux nombres algébriques distincts, de degré m et n, respectivement. Soit $P(X)$ un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que $P(\alpha) \neq 0$. Il existe alors une constante $c(m,n)$, ne dépendant que de m et n, telle que*

$$|\alpha - \beta| \geq c(m,n)\, 2^{-m-n}\, H(\alpha)^{-n}\, H(\beta)^{-m},$$

et

$$|P(\alpha)| \geq c(m,n)\, H(\alpha)^{-n}\, H(P)^{-m+1}.$$

Le choix $c(m,n) = (m+1)^{-n-1}\,(n+1)^{-m-1}$ convient.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du Corollary A.2 et du Theorem A.1 de [13]. □

Le résultat suivant montre que si l'on dispose d'une suite « dense » de polynômes de degré au plus r prenant des petites valeurs au point ξ, alors le nombre réel ξ ne peut pas être trop bien approchable par des nombres algébriques de degré au plus r.

Lemme 7.3. *Soit $r \geq 1$ un entier. Soient ξ un nombre réel et $(P_n(X))_{n\geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients entiers, deux à deux distincts, et de degré au plus r. Supposons qu'il existe des nombres réels $\eta > 0$ et $s > 1$ tels que*

$$|P_n(\xi)| < H(P_n)^{-r-\eta}, \quad n \geq 1,$$

et

$$H(P_{n-1}) \leq H(P_n) < H(P_{n-1})^s, \quad n \geq 1.$$

Supposons en outre que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) les polynômes $P_n(X)$, $n \geq 1$, sont irréductibles et primitifs ;
(ii) il existe $w > 0$ tel que $|P_n(\xi)| > H(P_n)^{-w}$ pour tout n.

Alors, $w_r(\xi)$ est fini.

La démonstration du lemme montre qu'il reste vrai sous des hypothèses plus faibles que (i) ou (ii). Toutefois, sa conclusion est fausse si les polynômes $P_n(X)$ ont de nombreuses racines en commun, comme l'illustre l'exemple suivant. Posons $\xi = \sum_{n\geq 1} 10^{-n!}$ et, pour tout entier $N \geq 15$, considérons le polynôme

$$Q_N(X) = 10^{N!}X - \sum_{n=1}^{N} 10^{N!-n!}.$$

On vérifie facilement que

$$|Q_N(\xi)| \asymp 10^{-N\cdot N!} \quad \text{et} \quad H(Q_N) \asymp 10^{N!},$$

où la notation $A \asymp B$ signifie qu'il existe des constantes numériques absolues c_1 et c_2 strictement positives telles que $c_1 A \leq B \leq c_2 A$. Pour tous entiers $j \geq 0$ et $N \geq 15$, posons $P_{j,N}(X) = (10^j X + 1)Q_N(X)$ et observons que

$$H(P_{j,N}) \asymp 10^{j+N!} \quad \text{et} \quad |P_{j,N}(\xi)| \asymp 10^{j-N\cdot N!} \asymp H(P_{j,N})^{-(N\cdot N!-j)/(j+N!)}.$$

En particulier, pour $j \leq N \cdot N!/5$, on obtient $|P_{j,N}(\xi)| < H(P_{j,N})^{-3}$ et $H(P_{j,N}) \leq 10^{(1+N/5)N!}$. Comme $H(Q_{N+1}) \asymp 10^{(N+1)!}$, on peut facilement extraire une sous-suite de polynômes de la suite $(P_{j,N}(X))_{j\geq 0, N\geq 1}$ vérifiant les hypothèses (à l'exception de (i) ou (ii)) du lemme 7.3 avec $r=2$, $\eta = 1$ et $s=6$. Cependant, ξ est un nombre de Liouville.

Démonstration du lemme 7.3. Dans ce qui suit, les constantes sous-entendues dans $\ll$ et $\gg$ ne dépendent que de r. Soit α un nombre algébrique réel de degré au plus égal à r. Supposons dans un premier temps que α n'annule aucun polynôme $P_m(X)$, $m \geq 1$.

Soit n le plus petit entier tel que

$$H(P_n) \geq 2\,(r+1)^{2(r+1)}\, H(\alpha)^r. \tag{7.1}$$

On a en particulier

$$H(\alpha) \gg H(P_n)^{1/(rs)}. \tag{7.2}$$

Le lemme 7.2 et (7.1) entraînent que

$$|P_n(\alpha)| \geq (r+1)^{-2(r+1)}\, H(\alpha)^{-r}\, H(P_n)^{-r+1} \geq 2H(P_n)^{-r} > 2|P_n(\xi)|. \tag{7.3}$$

Le théorème des accroissements finis implique

$$|\xi - \alpha| \cdot H(P_n) \gg |P_n(\xi) - P_n(\alpha)| \geq |P_n(\alpha)|/2,$$

d'où

$$|\xi-\alpha| \gg |P_n(\alpha)| \cdot H(P_n)^{-1} \gg H(\alpha)^{-r}\, H(P_n)^{-r} \gg H(\alpha)^{-r-r^2 s}, \tag{7.4}$$

par (7.2) et (7.3).

Sous l'hypothèse (i), si le nombre α est racine du polynôme $P_m(X)$, le raisonnement précédent conduit également à la minoration (7.4). En effet, le plus petit entier n vérifiant (7.1) est au moins égal à $m+1$ car $H(P_m) = H(\alpha)$, et donc α n'annule pas le polyôme $P_n(X)$.

Sous l'hypothèse (ii), la minoration (7.4) et le lemme 7.1 entraînent que $w_r(\xi)$ est fini. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Rappelons que la hauteur d'un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ est le maximum des valeurs absolues de ces coefficients et que la hauteur d'un hyperplan de $\mathbf{Q}^n$ déquation $y_1x_1 + \ldots + y_nx_n = 0$, où $y_1, \ldots, y_n$ sont des entiers non tous nuls et sans diviseur premier commun, est égale au maximum des valeurs absolues de $y_1, \ldots, y_n$.

Étant donnés des vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ de $\mathbf{Z}^n$, on note $\mathit{rang}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Lemme 7.4. *Soient n et N deux entiers tels que $N > 2^n$, et $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{Z}^n$ tels que*

$$H(\mathbf{p}_1) \leq H(\mathbf{p}_2) \leq \ldots \leq H(\mathbf{p}_N)$$

et

$$\mathit{rang}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N) < n.$$

Alors, il existe des entiers $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_l$ avec $l \geq N/2^n$, et tels que les points $\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}, \ldots \mathbf{p}_{j_l}$ appartiennent à un même hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ vérifiant

$$H(\mathcal{H}) \leq n! H(\mathbf{p}_{j_1})^n.$$

Pour démontrer le lemme 7.4, nous avons besoin du résultat suivant, dont nous omettons la démonstration.

Lemme 7.5. *Soient r et n deux entiers tels que $r < n$. Supposons qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_r$ appartenant à $\mathbf{Z}^n$ et tels que $H(\mathbf{p}_1) \leq H(\mathbf{p}_2) \leq \ldots \leq H(\mathbf{p}_r)$. Alors, il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ contenant ces points entiers et tel que*

$$H(\mathcal{H}) \leq r!\ H(\mathbf{p}_r)^r.$$

Démonstration du lemme 7.4. La fonction f qui, à un entier $k = 1, \ldots, n$, associe le rang sur $\mathbf{Q}$ de la famille de vecteurs $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{\lfloor N/2^k \rfloor}\}$ est décroissante et à valeurs entières, comprises entre 1 et $n-1$. Il existe donc un entier k tel que $2 \leq k \leq n$ et $f(k-1) = f(k)$, donc tel que

$$\mathit{rang}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{\lfloor N/2^k \rfloor}) = \mathit{rang}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{\lfloor N/2^{k-1} \rfloor}) := r < n.$$

Il existe ainsi des entiers $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_r \leq \lfloor N/2^k \rfloor$ tels que les vecteurs $\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_r}$ forment une famille génératrice de la famille $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{\lfloor N/2^{k-1} \rfloor}\}$. D'autre part, la suite $(H(\mathbf{p}_{i_j}))_{1 \leq j \leq r}$ étant par hypothèse croissante, le lemme 7.5 implique que les vecteurs $\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}, \ldots, \mathbf{p}_{i_r}$ appartiennent à un même hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ dont la hauteur est majorée par $r!\ H(\mathbf{p}_{i_r})^r$.

Posons $l := \lfloor N/2^{k-1} \rfloor - \lfloor N/2^k \rfloor + 1$. Pour $1 \leq m \leq l$, posons également $j_m := \lfloor N/2^k \rfloor + m - 1$. Ainsi, $l \geq N/2^n$ et $j_1 \geq i_r$. De plus, les vecteurs $\mathbf{p}_{j_1}, \mathbf{p}_{j_2}, \ldots, \mathbf{p}_{j_l}$ appartiennent à $\mathcal{H}$ et

$$H(\mathcal{H}) \leq n!\ H(\mathbf{p}_{j_1})^n,$$

puisque la suite $(H(\mathbf{p}_j))_{1 \leq j \leq N}$ est croissante. Cela termine la démonstration. □

8. Démonstration du théorème 3.1

Dans cette partie, nous montrons comment le théorème 3.1, c'est-à-dire l'extension p-adique du théorème de Baker énoncé dans la partie 2, se déduit facilement du théorème EL qui donne une majoration du nombre de solutions de l'inégalité (6.2).

Démonstration du théorème 3.1. Considérons un nombre réel irrationnel ξ satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.1. Il existe alors un ensemble fini $\mathcal{S}$ de nombres premiers, des nombres réels ε, c et une infinité de nombres rationnels p_n/q_n écrits sous forme irréductible vérifiant $0 < \varepsilon < 1/5$, $c > 1$,

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_n|_\ell \cdot |q_n|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2 q_n^{2+\varepsilon/2}}$$

et

$$q_n < q_{n+1} \leq q_n^c, \quad (n \geq 1). \tag{8.1}$$

Sans restriction, nous supposons que $0 < \xi < 1$.

Soient d un entier strictement positif et α un nombre réel algébrique de degré d. Soit j tel que

$$q_{j-1} \leq \sqrt{d+1}\, H(\alpha) < q_j. \tag{8.2}$$

On suppose que $H(\alpha)$ est choisi suffisamment grand de sorte que

$$H(\alpha) > 4^{4/\varepsilon} \quad \text{et} \quad q_j > 4^c\,(d+1)^c \tag{8.3}$$

soient simultanément satisfaites. Observons que si α est le rationnel p/q, où $q \geq 1$, alors $H(\alpha) = q$ et $q_j > q$; en particulier, $\alpha \neq p_{j+h}/q_{j+h}$ pour tout entier positif h. Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Nous supposons $\chi \geq 1$ et majorons χ en fonction de d.

Posons $v = 2 + \varepsilon$. Soit T le plus grand nombre entier pour lequel $2q_{j+T}^v < H(\alpha)^\chi$. Pour tout entier $h = 1, \ldots, T$, les inégalités

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi} < \frac{1}{2q_{j+T}^v} \leq \frac{1}{2q_{j+h}^v}$$

entraînent

$$\left| \alpha - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}} \right| \leq \left| \xi - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}} \right| + |\xi - \alpha| \leq \left| \xi - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}} \right| + \frac{1}{2q_{j+h}^v},$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_{j+h}|_\ell \cdot |q_{j+h}|_\ell \right) \cdot \left| \alpha - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}} \right| &\leq \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_{j+h}|_\ell \cdot |q_{j+h}|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}} \right| + \frac{1}{2q_{j+h}^v} \\ &\leq \frac{1}{q_{j+h}^v} \cdot \end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité

$$\left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p|_\ell \cdot |q|_\ell \right) \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^v}$$

possède au moins T solutions rationnelles irréductibles p/q avec $q > q_j$, et, d'après (8.2) et (8.3), le théorème EL entraîne la majoration

$$T < e^{8s+31}\varepsilon^{-s-5}\log(6d)\cdot\log\bigl(2\varepsilon^{-1}\log(6d)\bigr), \tag{8.4}$$

où s est le cardinal de $\mathcal{S}$.

Cependant, comme $\chi \geq 1$, notre choix de T et les inégalités (8.1), (8.2) et (8.3) impliquent

$$2q_j^{vc^{T+1}} \geq 2q_{j+T+1}^{v} \geq H(\alpha)^{\chi} \geq \bigl((d+1)^{-1/2}\bigr)^{\chi}\, q_j^{\chi/c} \geq 2q_j^{\chi/(2c)},$$

et donc

$$\chi \leq 2vc^{T+2}. \tag{8.5}$$

Le lemme 7.1 et les inégalités (8.4) et (8.5) assurent alors l'existence d'une constante c', ne dépendant que de ξ, telle que

$$w_d(\xi) \leq (2d)^{c'\log\log 3d}.$$

En particulier, nous avons établi que ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre. □

Notre démonstration est nettement plus simple que celle de Baker et conduit à une meilleure mesure de transcendance. Notons cependant que cette amélioration est une conséquence de résultats récents sur le lemme de Roth qui sont au cœur de la démonstration du théorème EL.

La clef de notre démonstration est l'existence d'une majoration du nombre de grandes solutions de (6.2) ne dépendant que du degré de ξ. Lorsque $\mathcal{S}$ est réduit à l'ensemble vide, une telle majoration fut pour la première fois soulignée par Mignotte [41], mais elle découle facilement de la démonstration de Davenport et Roth [20]. En particulier, en remplaçant dans la démonstration du théorème 3.1 le théorème EL par un énoncé correspondant implicite dans [20], nettement antérieur à l'article de Baker [10], nous obtenons, tout comme Baker, une mesure de transcendance donnée par (2.3). En utilisant le résultat de Mignotte [41], nous établissons la mesure de transcendance

$$w_d(\xi) \leq \exp\exp\{c\log 2d\}, \quad (d \geq 1),$$

où c est un entier positif.

Outre sa simplicité, la démonstration ci-dessus possède un autre avantage sur celle de Baker : elle se généralise sans trop de difficultés techniques à des situations où la transcendance du nombre ξ est établie non pas au moyen du théorème de Ridout, mais à l'aide du théorème du sous-espace de Schmidt, comme l'illustrent les résultats de la partie 4.

Notons également que notre démonstration permet d'associer une mesure de transcendance à tout nombre ξ dont on sait démontrer la transcendance à l'aide du théorème de

Roth (ou de Ridout). Supposons en effet qu'il existe un nombre réel ε et une infinité de nombres rationnels p_n/q_n écrits sous forme irréductible vérifiant $0 < \varepsilon < 1$ et

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^{2+\varepsilon}}.$$

Définissons une fonction strictement croissante φ à valeurs entières et telle que

$$q_n < q_{n+1} \leq \varphi(q_n), \quad n \geq 1.$$

Soit $d \geq 1$ un entier et soit α un nombre algébrique réel. Soit Ψ la fonction définie sur $\mathbf{Z}_{\geq 1}$ par

$$\Psi(x) = \frac{1}{\left(\varphi^{\circ T}(x)\right)^6},$$

avec

$$T = \left\lceil 2 \cdot 10^7 \, \varepsilon^{-3} (\log \varepsilon^{-1})^2 \, (\log 4d) \, (\log \log 4d) \right\rceil + 2$$

et où $\varphi^{\circ T}$ désigne la T-ième itérée de la fonction φ. En reprenant la démonstration ci-dessus, on obtient sans difficulté que

$$|\xi - \alpha| > \Psi(H(\alpha)),$$

si $H(\alpha)$ est suffisamment grand. Bien sûr, cette mesure de transcendance est d'autant moins fine que φ croît rapidement.

9. Démonstrations des théorèmes 4.1 et 4.2

Avant de démontrer les théorèmes 4.1 et 4.2, nous discutons brièvement une remarque qui suit l'énoncé du théorème B. Nous conservons les hypothèses de ce théorème, à ceci près que nous ne supposons plus les rationnels p_n/q_n écrits sous forme irréductible. Pour $n \geq 1$, notons d_n le plus grand diviseur commun à p_n et q_n. Alors,

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n/d_n}{q_n/d_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}} = \frac{1}{d_n^{2+\varepsilon} \, (q_n/d_n)^{2+\varepsilon}},$$

et deux situations distinctes peuvent se produire. Ou bien, pour tout nombre réel w, il existe n tel que $d_n > (q_n/d_n)^w$, et alors ξ est un nombre de Liouville. Ou bien il existe un nombre réel κ tel que $d_n < (q_n/d_n)^\kappa$ pour tout $n \geq 1$. Dans ce cas, il existe une suite $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers positifs strictement croissante telle que

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{\log(q_{n_{j+1}}/d_{n_{j+1}})}{\log(q_{n_j}/d_{n_j})} < +\infty,$$

et nous sommes ramenés au théorème B.

L'inégalité ci-dessus se justifie de la manière suivante. Quitte au besoin à extraire une sous-suite de la suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$, on peut supposer que $q_{n+1} \geq q_n^2$ pour tout $n \geq 1$. Soient n et j des entiers strictement positifs tels que $q_{n+j}/d_{n+j} = q_n/d_n$. De l'inégalité $q_{n+j} \geq q_n^{2^j}$, on déduit

$$\frac{q_n}{d_n} = \frac{q_{n+j}}{d_{n+j}} \geq \frac{d_n^{2^j}}{d_{n+j}} \cdot \left(\frac{q_n}{d_n}\right)^{2^j},$$

d'où $d_{n+j} \geq (q_{n+j}/d_{n+j})^{2^j-1}$ et la majoration $2^j \leq \kappa + 1$. Les nombres rationnels p_n/q_n et p_{n+j}/q_{n+j} sont donc différents si j est assez grand.

Notre stratégie est la suivante. Nous généralisons la démonstration du théorème 3.1 afin de contrôler la qualité de l'approximation des nombres réels, vérifiant les hypothèses du théorème 4.1 ou celles du théorème 4.2, par des nombres algébriques de degré au moins $r+1$.

À cet effet, il est commode de définir de nouveaux exposants d'approximation diophantienne, à savoir les fonctions w_d^{ex}, où l'exposant $^{\mathrm{ex}}$ signifie que l'on se restreint à l'approximation par des nombres algébriques de degré exactement égal à d.

Démonstration du théorème 4.1. Nous conservons les notations de l'énoncé du théorème 4.1 et supposons que $0 < \xi < 1$. Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > r$ de hauteur suffisamment grande. On suppose en outre $\varepsilon < 1/2$,

$$H(\alpha) > (r+1)^{8(r+1)/\varepsilon} \tag{9.1}$$

et $0 < \alpha < 1$ (ce qui est possible puisque $0 < \xi < 1$).

Notons tout d'abord que l'inégalité (4.2) permet, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$, de supposer qu'il existe un nombre entier C indépendant de d tel que

$$2\log q_n < \log q_{n+1} < C \log q_n, \tag{9.2}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Notons n_0 l'entier déterminé par les inégalités

$$q_{n_0} \leq H(\alpha) < q_{n_0+1} \tag{9.3}$$

et M le plus grand entier pair tel que

$$q_{n_0}^{\chi} > q_{n_0+M}^{2+\varepsilon}. \tag{9.4}$$

Nous allons majorer M en fonction de d et ainsi, compte tenu de (9.2), majorer χ en fonction de d.

Pour tous entiers $j = 1, \ldots, M$ et $k = 1, \ldots, r$, on obtient

$$\|q_{n_0+j}\alpha^k\| \leq \|q_{n_0+j}\xi^k\| + \|q_{n_0+j}(\xi^k - \alpha^k)\| \leq \|q_{n_0+j}\xi^k\| + \frac{k(|\xi|+1)}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}}$$
$$\leq \max\left\{2\|q_{n_0+j}\xi^k\|, \ \frac{4k}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}}\right\},$$

d'où, d'après (9.1) et (9.3),

$$\|q_{n_0+j}\alpha\| \cdot \|q_{n_0+j}\alpha^2\| \ldots \|q_{n_0+j}\alpha^r\| < \frac{\max\{2^{r+1}, 4r\}}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}} = \frac{2^{r+1}}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon/2}}. \tag{9.5}$$

Étant donné un entier n, il existe des entiers $p_{k,n}$, $1 \leq k \leq r$ vérifiant $\|q_n\alpha^k\| = |q_n\alpha^k - p_{k,n}|$, et donc

$$\left|\alpha^k - \frac{p_{k,n}}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n}, \ \ 1 \leq k \leq r. \tag{9.6}$$

Considérons les formes linéaires

$$L_0(X_0, X_1, \ldots, X_r) = \ X_0$$

et

$$L_k(X_0, X_1, \ldots, X_r) = \alpha^k X_0 - X_k, \quad \text{pour } k = 1, \ldots, r.$$

Pour $n \geq 1$, posons $\mathbf{p}_n := (q_n, p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{r,n})$. Le raisonnement tenu au début de cette partie montre qu'ou bien $w_r(\xi) = +\infty$, ou bien, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ et à modifier la constante C de (9.2), tous les vecteurs $\mathbf{p}_n$ sont primitifs. Nous nous plaçons désormais sous cette hypothèse.

D'après (9.6) et le fait que $0 < \alpha < 1$, on peut choisir $H(\alpha)$ suffisamment grande pour que

$$H(\mathbf{p}_n) = q_n \tag{9.7}$$

pour $n \geq n_0$. L'inégalité (9.2) implique alors que la suite $(H(\mathbf{p}_n))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante. Posons $\mathcal{N}_1 := \{\mathbf{p}_n, \ n_0 + M/2 \leq n \leq n_0 + M\}$ et notons M_1 le cardinal de $\mathcal{N}_1$. Ainsi,

$$M_1 \geq M/2. \tag{9.8}$$

De (9.5), (9.6) et (9.7), on déduit

$$\prod_{k=0}^{r} |L_k(\mathbf{p}_n)| < H(\mathbf{p}_n)^{-\varepsilon/2}.$$

Sans restriction, on suppose que M est choisi de sorte que

$$q_{n_0+M/2} > \max\{H(L_k), 0 \leq k \leq r\}.$$

Nous avons donc $H(\mathbf{p}_n) > \max\{H(L_k) : 0 \leq k \leq r\}$, pour tout $n \in \mathcal{N}_1$, et nous pouvons donc appliquer le théorème ES avec $m = r+1$. Notons T le majorant du nombre de sous-espaces donné par le théorème ES et posons $t := \lfloor M_1/T \rfloor$. D'après (9.1) et le théorème ES, il existe une constante $c_{r,\varepsilon}$, ne dépendant que de r et ε, et telle que

$$T < c_{r,\varepsilon}(\log 3d)\,(\log\log 3d). \tag{9.9}$$

Le principe des tiroirs assure l'existence d'un sous-espace propre de $\mathbf{Q}^{r+1}$ contenant au moins t points de $\mathcal{N}_1$. Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $\mathbf{y} := (y_0, y_1, \ldots, y_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ et un ensemble d'entiers $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$, de cardinal t, tels que

$$y_0 q_n + y_1 p_{1,n} + \ldots + y_r p_{r,n} = 0, \tag{9.10}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_2$. Notons $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$ les éléments de $\mathcal{N}_2$ une fois ordonnés.

Si $t \leq 2^{r+1}$, on obtient $M < 2(2^{r+1}+1)T$, ce qui termine la démonstration d'après (9.9). Nous supposons donc dans la suite que $t > 2^{r+1}$. D'après (9.10), le rang de la famille $\{\mathbf{p}_{i_h},\ 1 \leq h \leq t\}$ est strictement inférieur à $r+1$. Comme $t > 2^{r+1}$, le lemme 7.4 implique l'existence d'entiers $j_1 < \ldots < j_l$ vérifiant

$$l \geq \frac{t}{2^{r+1}} = \frac{\lfloor M_1/T \rfloor}{2^{r+1}}, \tag{9.11}$$

et d'un vecteur primitif non nul $\mathbf{y}' := (y'_0, y'_1, \ldots, y'_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ tel que

$$y'_0 q_n + y'_1 p_{1,n} + \ldots + y'_r p_{r,n} = 0, \tag{9.12}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_3 := \{j_h,\ 1 \leq h \leq l\}$, et vérifiant

$$H(\mathbf{y}') \leq (r+1)!\, H(\mathbf{p}_{j_1})^{r+1} = (r+1)!\, q_{j_1}^{r+1}. \tag{9.13}$$

Considérons à présent le polynôme $P(X) := \sum_{k=0}^{r} y'_k X^k$. D'après (9.1), (9.6), (9.12) et (9.13), il vient pour tout $n \in \mathcal{N}_3$

$$|P(\alpha)| = \left| \sum_{k=0}^{r} y'_k \left(\alpha^k - \frac{p_{k,n}}{q_n} \right) \right| \leq \frac{r(r+1)!\, q_{j_1}^{r+1}}{q_n} < \frac{q_{j_1}^{r+2}}{q_n}.$$

En particulier, comme j_l appartient à $\mathcal{N}_3$, on obtient

$$|P(\alpha)| \leq \frac{q_{j_1}^{r+2}}{q_{j_l}}. \tag{9.14}$$

Par hypothèse, le degré de α est strictement supérieur à r, donc le nombre réel $P(\alpha)$ n'est pas nul, et le lemme 7.2, (9.2), (9.3) et (9.13) impliquent alors que

$$\begin{aligned} |P(\alpha)| &\gg H(\alpha)^{-r}\, H(P)^{-d+1} = H(\alpha)^{-r}\, H(\mathbf{y}')^{-d+1} \\ &\gg H(\alpha)^{-r}\, q_{j_1}^{-(r+1)(d-1)} \gg q_{j_1}^{-d(r+1)}, \end{aligned} \tag{9.15}$$

Il découle alors des inégalités (9.2), (9.14) et (9.15) qu'il existe une constante B indépendante de d et telle que

$$l \leq B \log d.$$

Puis en utilisant (9.8), (9.9) et (9.11), il vient

$$M < c\,(\log 3d)\,(\log\log 3d),$$

où $c := 2(2^{r+1}B+1)c_{r,\varepsilon}$ ne dépend pas de d. D'après les inégalités (9.2) et (9.4), entraîne que

$$w_d^{\mathrm{ex}}(\xi) \leq \exp\{c'(\log 3d)^2(\log\log 3d)\},$$

où c' est une constante indépendante de d. Le lemme 7.1 permet alors de conclure cette démonstration. □

Avant d'aborder la démonstration du théorème 4.2, nous établissons une proposition auxiliaire.

Proposition 9.1. *Soient M et r deux entiers strictement positifs, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ des nombres algébriques réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Notons L_0 la forme linéaire définie par $L_0(X_0, X_1, \dots, X_r) := \sum_{j=0}^{r} \alpha_j X_j$ et posons $d := [\mathbf{Q}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) : \mathbf{Q}]$. Soit $(\mathbf{x}_n)_{1 \leq n \leq M}$ une suite de vecteurs primitifs appartenant à $\mathbf{Z}^{r+1}$. Supposons qu'il existe des nombres réels $a > 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $1 \leq n \leq M$:*

(i) $H(\mathbf{x}_1) > H(L_0)$ *et* $H(\mathbf{x}_1) > H(\alpha_j)$, $0 \leq j \leq r$,

(ii) $\log H(\mathbf{x}_{n+1}) > a \log H(\mathbf{x}_n)$,

(iii) $|L_0(\mathbf{x}_n)| < H(\mathbf{x}_n)^{-r-\varepsilon}$.

Alors il existe une constante C ne dépendant que des paramètres r, ε et a telle que

$$M < C(\log 3d)^r\,(\log\log 3d)^r.$$

Démonstration de la proposition 9.1. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier r. Pour $r = 1$, il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème EL.

Soit $r \geq 2$ un entier tel que la conclusion de la proposition 9.1 est vraie pour $k = 1, \dots, r-1$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ des nombres algébriques qui vérifient les hypothèses de la proposition 9.1.

Pour tout entier $n = 1, \dots, M$, posons $\mathbf{x}_n := (x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{r,n})$. Nous supposons également, ce qui ne cause aucune perte de généralité, que

$$H(\mathbf{x}_1) > 4((r+1)!)^2. \tag{9.16}$$

Considérons à présent les formes linéaires

$$L_k(X_0, X_1, \dots, X_r) := X_k, \quad \text{pour } i = k, \dots, r.$$

Posons $\mathcal{N}_1 := \{\mathbf{x}_n,\ 1 \le n \le M\}$. D'après (iii), il vient

$$\prod_{k=0}^{r} |L_k(\mathbf{x}_n)| < H(\mathbf{x}_n)^{-\varepsilon}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_1$. De plus, les conditions (i) et (ii) impliquent que $H(\mathbf{x}_n) > H(L_k)$, pour $k = 0, \ldots, r$ et $n \in \mathcal{N}_1$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème ES. Notons T le majorant du nombre de sous-espaces donné par ce théorème et posons $m := \lfloor M/T \rfloor$. Il existe une constante $c_{r,\varepsilon}$ ne dépendant que de r et ε et telle que

$$T < c_{r,\varepsilon}(\log 3d)\,(\log\log 3d). \tag{9.17}$$

Le principe des tiroirs assure alors l'existence d'un sous-espace propre de $\mathbf{Q}^{r+1}$ contenant au moins m points de $\mathcal{N}_1$. Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $\mathbf{y} := (y_0, y_1, \ldots, y_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ et un ensemble d'entiers $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$, de cardinal m, tel que

$$y_0 x_{0,n} + y_1 x_{1,n} + \ldots + y_r x_{r,n} = 0, \tag{9.18}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_2$. Notons $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ les éléments de $\mathcal{N}_2$ une fois ordonnés.

Si $m \le 2^{r+1}$, on obtient $M < (2^{r+1}+1)T$, ce qui termine la démonstration d'après (9.17). Nous supposons donc dans la suite $m > 2^{r+1}$. D'après (9.18), le rang de la famille $\{\mathbf{x}_{i_h},\ 1 \le h \le m\}$ est strictement inférieur à $r+1$. Comme $m > 2^{r+1}$, le lemme 7.4 implique l'existence d'entiers $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$ vérifiant

$$s \ge \frac{m}{2^{r+1}} = \frac{\lfloor M/T \rfloor}{2^{r+1}}, \tag{9.19}$$

et d'un vecteur non nul $\mathbf{z} := (z_0, z_1, \ldots, z_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ tel que

$$z_0 x_{0,n} + z_1 x_{1,n} + \ldots + z_r x_{r,n} = 0 \tag{9.20}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_3 := \{j_h,\ 1 \le h \le s\}$, et vérifiant

$$\max\{|z_k|,\ 0 \le k \le r\} \le (r+1)!\ H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+1}. \tag{9.21}$$

Nous supposons dans la suite que

$$s > \kappa_{a,r} := 4 + 2\frac{\log(2r+5)}{\log a}\cdot \tag{9.22}$$

En effet, dans le cas contraire, l'inégalité (9.19) implique $r < 2^{r+1}\kappa_{a,r}$ et donc $M < (2^{r+1}\kappa_{a,r}+1)T$, ce qui termine la démonstration d'après (9.17).

Sans restriction, on peut supposer que z_r n'est pas nul. Pour $j = 0, \ldots, r-1$, posons $\alpha'_j := z_j\alpha_r - z_r\alpha_j$. Un rapide calcul montre que

$$H(z_j\alpha_r - z_r\alpha_j) \le \bigl(4\max\{|z_i|,\ 0 \le i \le r\}^2 H(\alpha_r)H(\alpha_j)\bigr)^d,$$

et donc, en utilisant (9.16) et (9.21), on obtient

$$H(\alpha'_j) < 4^d((r+1)!)^{2d} H(\mathbf{x}_{j_1})^{2(r+2)d} < H(\mathbf{x}_{j_1})^{2(r+3)d},$$

pour tout entier $j = 0, \ldots, r-1$.

Introduisons à présent l'ensemble d'entiers $\mathcal{N}_4 \subset \mathcal{N}_3$ défini par $\mathcal{N}_4 := \{j_h,\ \lfloor s/2 \rfloor \leq h \leq s\}$. Notons $k_1 < k_2 < \ldots < k_t$ les éléments de $\mathcal{N}_4$ une fois ordonnés, et observons que

$$t \geq s/2. \tag{9.23}$$

Soit $n \in \mathcal{N}_4$. Posons $\mathbf{x}'_n := (x_{0,n}, \ldots, x_{r-1,n}) \in \mathbf{Z}^r$ et notons que

$$H(\mathbf{x}_n) < H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}\, H(\mathbf{x}'_n),$$

puisque, comme z_r n'est pas nul, il découle de (9.20), (9.21) et (9.16) que

$$\begin{aligned} |x_{r,n}| &= \left| \frac{z_0 x_{0,n} + \ldots + z_{r-1} x_{r-1,n}}{z_r} \right| \\ &< r(r+1)! H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+1} \max\{|x_{0,n}|, \ldots, |x_{r-1,n}|\} \\ &< H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}\, H(\mathbf{x}'_n). \end{aligned}$$

D'après (iii), (9.20), (9.21) et (9.22), on a

$$\left| x_{0,n}\alpha'_0 + \ldots + x_{r-1,n}\alpha'_{r-1} \right| < |z_r|\, H(\mathbf{x}_n)^{-r-\varepsilon} < H(\mathbf{x}'_n)^{-(r-1)-1/2}, \tag{9.24}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_4$.

Rien ne garantit que le vecteur $\mathbf{x}'_n$ soit primitif. Néanmoins, comme le vecteur $\mathbf{x}_n$ est primitif, (9.20) et (9.21) entraînent que le plus grand diviseur commun aux coordonnées de $\mathbf{x}'_n$ n'excède pas $(r+1)! H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+1}$. En particulier, si n_1 et n_2 sont deux éléments distincts de $\mathcal{N}_4$, la minoration (9.22) assure que les vecteurs $\mathbf{x}'_{n_1}$ et $\mathbf{x}'_{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

Pour $n \in \mathcal{N}_4$, soit $\mathbf{x}''_n$ un vecteur primitif colinéaire à $\mathbf{x}'_n$. Considérons la forme linéaire L' définie par $L'(X_0, \ldots, X_{r-1}) := \sum_{j=0}^{r-1} \alpha'_j X_j$. D'après (9.24), il vient

$$|L'(\mathbf{x}''_n)| < H(\mathbf{x}''_n)^{-(r-1)-1/2}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_4$. On vérifie de plus aisément que les α'_j, $0 \leq j \leq r-1$, sont des nombres algébriques réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et que $[\mathbf{Q}(\alpha'_0, \ldots, \alpha'_{r-1}) : \mathbf{Q}] \leq d$.

L'hypothèse de récurrence assure donc l'existence d'une constante A, ne dépendant que des paramètres r, ε et a, telle que

$$t < A(\log 3d)^{r-1} (\log\log 3d)^{r-1}.$$

Les inégalités (9.17), (9.19) et (9.23) donnent alors la majoration souhaitée pour M, à savoir

$$M < C(\log 3d)^r (\log\log 3d)^r,$$

où $C := (2^{r+2}A+1)c_{r,\varepsilon}$. Cela termine cette démonstration. □

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 4.2.

Démonstration du théorème 4.2. Elle découle de la proposition 9.1 et du lemme 7.3. Nous conservons les notations de l'énoncé du théorème 4.2. Comme précédemment, on peut supposer qu'il existe un entier C tel que

$$2\log H(P_n) < \log H(P_{n+1}) < C\log H(P_n), \tag{9.25}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > r$ et de hauteur suffisamment grande pour garantir que

$$H(\alpha)^{\varepsilon/2} > 2r(r+1)(|\xi|+1). \tag{9.26}$$

Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Nous allons majorer χ en fonction de d. Notons n_0 l'unique entier tel que

$$H(P_{n_0}) \leq H(\alpha) < H(P_{n_0+1}) \tag{9.27}$$

et M le plus grand entier pair tel que $H(P_{n_0})^{\chi} > H(P_{n_0+M})^{r+1+\varepsilon}$.

D'après (9.26) et (9.27) :

$$\begin{aligned}
|P_{n_0+j}(\alpha)| &\leq |P_{n_0+j}(\alpha) - P_{n_0+j}(\xi)| + |P_{n_0+j}(\xi)| \\
&\leq (r+1)rH(P_{n_0+j})(|\xi|+1)|\alpha-\xi| + |P_{n_0+j}(\xi)| \\
&\leq H(P_{n_0+j})^{-r-\varepsilon/2},
\end{aligned}$$

pour $j = 1, \ldots, M$. Nous supposons dans la suite que l'entier M est suffisamment grand, de sorte que

$$H(P_{n_0+M/2}) > \max\{H(\alpha^j),\ 0 \leq j \leq r\} \quad \text{et} \quad H(P_{n_0+M/2}) > H(L), \tag{9.28}$$

où L est la forme linéaire $L(X_0, X_1, \ldots, X_r) := \sum_{j=0}^{r} \alpha^j X_j$. D'après (9.25), cela ne cause aucune perte de généralité.

Pour $n \geq 1$, notons

$$P_{n_0+n}(X) := x_{0,n_0+n} + x_{1,n_0+n}X + \ldots + x_{r,n_0+n}X^r.$$

Lorsque le degré m du polynôme $P_{n_0+n}(X)$ est strictement inférieur à r, on pose simplement $x_{m+1,n_0+n} = \ldots = x_{r,n_0+n} = 0$, ce qui ne change rien dans la suite. Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathbf{x}_n := (x_{0,n_0+M/2+n}, x_{1,n_0+M/2+n}, \ldots, x_{r,n_0+M/2+n}) \in \mathbf{Z}^{r+1}.$$

Le raisonnement tenu au début de cette partie montre qu'ou bien $w_r(\xi) = +\infty$, ou bien, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ et à modifier la constante C de (9.25), tous les $\mathbf{x}_n$ sont primitifs. Nous nous plaçons désormais sous cette hypothèse.

Les inégalités (9.25) et (9.28) montrent que nous pouvons appliquer la proposition 9.1, laquelle conduit à

$$M/2 < c(\log 3d)^r\,(\log\log 3d)^r,$$

où la constante c ne dépend que de r et de ε. La majoration souhaitée pour χ découle alors de (9.25), ce qui, au vu des lemmes 7.1 et 7.3, termine la démonstration du théorème 4.2. $\square$

10. Démonstration du théorème 5.3

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 5.3. Notre stratégie est la suivante. Dans un premier temps, nous exhibons une propriété combinatoire des suites de complexité sous-linéaire. Cela nous permet (cf. proposition 10.1) d'associer à tout nombre réel de complexité sous-linéaire une suite d'approximations rationnelles $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ possédant les trois propriétés suivantes :

(a) ces rationnels sont d'assez bonnes approximations de ξ;

(b) les dénominateurs q_n ont une forme très particulière, à savoir $q_n = b^{r_n}(b^{s_n} - 1)$, où r_n et s_n sont des entiers;

(c) la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est, en un certain sens, dense.

Les propriétés (a) et (b) sont utilisées dans [2] pour démontrer que tout nombre de complexité sous-linéaire est soit rationnel, soit transcendant. Afin d'obtenir la mesure de transcendance souhaitée, nous utilisons en plus la propriété (c) qui nous permet d'appliquer le théorème ES en suivant la méthode introduite dans la partie 8.

Tout au long des parties 10 et 11, la lettre b désigne un entier fixé supérieur ou égal à 2. Étant donné un nombre réel ξ, $0 < \xi < 1$, on note

$$\xi = 0.a_1 a_2 \ldots$$

le développement de ξ en base b.

10.1. Combinatoire des suites de complexité sous-linéaire

Nous montrons ici que les suites de complexité sous-linéaires contiennent des occurrences précoces de motifs répétitifs. Cette propriété combinatoire assure l'existence de la suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ mentionnée précédemment.

Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 10.1. *Soit $b \geq 2$ un entier. Soit ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b et vérifiant $0 < \xi < 1$. Il existe alors deux nombres réels positifs w et c, deux suites d'entiers positifs ou nuls $(r_j)_{j\geq 1}$, $(p_j)_{j\geq 1}$, et une suite strictement croissante d'entiers positifs $(s_j)_{j\geq 1}$ tels que $1 < w < 3/2$ et, pour tout $j \geq 1$,*

(i) $r_j \leq cs_j$;

(ii) *si $r_j \geq 1$, alors b ne divise pas p_j ;*

(iii) $2(r_j + s_j) \leq r_{j+1} + s_{j+1} \leq c(r_j + s_j)$;

(iv)
$$\left| \xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j} - 1)} \right| < \frac{1}{2b^{w(r_j+s_j)}}.$$

Démonstration de la proposition 10.1. Soit $\mathbf{a}$ une suite de complexité sous-linéaire définie sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. Soient c et n_0 deux entiers tels que

$$p(n, \mathbf{a}) \leq cn, \quad (n \geq n_0).$$

Pour $\ell \geq 1$, notons $A(\ell)$ le préfixe de $\mathbf{a}$ de longueur ℓ. Le principe des tiroirs montre que si $\ell \geq n_0$, alors il existe (au moins) un mot W_ℓ de longueur ℓ ayant (au moins) deux occurrences dans $A((c+1)\ell)$. En d'autres termes, il existe des mots (éventuellement vides) B_ℓ, D_ℓ, E_ℓ et un mot non vide C_ℓ tels que

$$A((c+1)\ell) = B_\ell W_\ell D_\ell E_\ell = B_\ell C_\ell W_\ell E_\ell.$$

Nous choisissons ces mots de sorte que, si B_ℓ n'est pas le mot vide ε, les dernières lettres de B_ℓ et de C_ℓ soient différentes.

Nous devons distinguer deux cas.

Supposons tout d'abord que $|C_\ell| \geq |W_\ell|$. Alors, il existe un mot F_ℓ tel que

$$A((c+1)\ell) = B_\ell W_\ell F_\ell W_\ell E_\ell.$$

Posons $U_\ell = B_\ell$, $V_\ell = W_\ell F_\ell$ et $w_\ell = |W_\ell F_\ell W_\ell|/|W_\ell F_\ell|$. Alors le mot $U_\ell V_\ell^{w_\ell}$ est un préfixe de $\mathbf{a}$ et $w_\ell \geq 1 + 1/c$. En outre, si $U_\ell \neq \varepsilon$, les dernières lettres de U_ℓ et de V_ℓ diffèrent.

Supposons maintenant que $|C_\ell| < |W_\ell|$, c'est-à-dire que les deux occurrences de W_ℓ se chevauchent. Il existe alors un nombre rationnel $s_\ell > 1$ tel que

$$W_\ell = C_\ell^{s_\ell}.$$

Posons $U_\ell = B_\ell$, $V_\ell = C_\ell^{\lceil s_\ell/2 \rceil}$ et $w_\ell = (s_\ell + 1)/\lceil s_\ell/2 \rceil$. Alors, le mot $U_\ell V_\ell^{w_\ell}$ est un préfixe de $\mathbf{a}$ et $w_\ell \geq 3/2$. En outre, $\ell/2 \leq |V_\ell| \leq \ell$ et, si $U_\ell \neq \varepsilon$, les dernières lettres de U_ℓ et de V_ℓ diffèrent.

Posant $w = \min\{1 + 1/c, 3/2\}$, nous avons montré que, pour tout entier $\ell \geq n_0$, il existe deux mots finis U_ℓ et V_ℓ tels que

(v) $U_\ell V_\ell^w$ est un préfixe de $\mathbf{a}$;

(vi) $|U_\ell| \leq (2c+1)|V_\ell|$;

(vii) $\ell/2 \leq |V_\ell| \leq c\ell$;

(viii) si U_ℓ n'est pas le mot vide, les dernières lettres de U_ℓ et de V_ℓ diffèrent.

D'autre part, un rapide calcul montre que cette construction garantit également que

$$\frac{|U_\ell V_\ell^w|}{|U_\ell V_\ell|} \geq 1 + \frac{1}{2c+1} \cdot \tag{10.1}$$

Cette dernière propriété ne sert pas ici, mais elle sera utilisée dans la partie 11.

Nous insistons sur le fait que les mots U_ℓ, $\ell \geq 1$, ainsi construits ne sont pas nécessairement tous différents.

Soit $\mathbf{a} = (a_k)_{k\geq 1}$ la suite de complexité sous-linéaire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ telle que

$$\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{b^k} \cdot$$

Le raisonnement ci-dessous nous permet d'associer à la suite $\mathbf{a}$ deux suites de mots finis $(U_\ell)_{\ell\geq 1}$ et $(V_\ell)_{\ell\geq 1}$ vérifiant les propriétés (v) à (viii). Notons respectivement ρ_ℓ et σ_ℓ les longueurs de U_ℓ et de V_ℓ, pour $\ell \geq 1$. Comme

$$\frac{\ell}{2} \leq \rho_\ell + \sigma_\ell \leq (c+1)\ell,$$

il vient, pour tout entier ℓ,

$$\begin{aligned} 2(\rho_\ell + \sigma_\ell) \leq 2(c+1)\ell &\leq \rho_{4(c+1)\ell} + \sigma_{4(c+1)\ell} \\ &\leq 4(c+1)^2\ell \leq 8(c+1)^2(\rho_\ell + \sigma_\ell). \end{aligned}$$

En posant $C = 8(c+1)^2$, $r_j = \rho_{4^j(c+1)^j}$ et $s_j = \sigma_{4^j(c+1)^j}$, pour $j \geq 1$, on a donc

$$2(r_j + s_j) \leq r_{j+1} + s_{j+1} \leq C(r_j + s_j).$$

Comme $r_j \leq Cs_j$, les conditions (i) et (iii) du théorème sont vérifiées. De plus, la suite $(s_j)_{j\geq 1}$ est bien strictement croissante.

Pour $\ell \geq n_0$, définissons l'entier p_j par l'égalité

$$\frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)} = 0.U_{4^j(c+1)^j} V_{4^j(c+1)^j}^{\infty}. \tag{10.2}$$

Notons que le développement du nombre rationnel $p_j/b^{r_j}(b^{s_j}-1)$ donné en (10.2) peut éventuellement correspondre à un développement impropre en base b. Cela se produit précisément lorsque $V_{4^j(c+1)^j}^{\infty} = (b-1)^\infty$, mais n'est source d'aucune difficulté supplémentaire. Les entiers p_j et $b^{r_j}(b^{s_j}-1)$ peuvent très bien avoir des diviseurs commun, néanmoins, la condition (viii) assure que b ne divise pas p_j si $r_j \geq 1$. En effet, un calcul facile montre qu'alors p_j est égal à $v_j - u_j$ plus un multiple de b, où v_j et u_j sont, respectivement, les derniers chiffres de $V_{4^j(c+1)^j}$ et de $U_{4^j(c+1)^j}$. Ceci montre que la condition (ii) est vérifiée.

Il découle de (v) et de (10.2) que

$$\left| \xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)} \right| < \frac{1}{b^{r_j+ws_j}}. \tag{10.3}$$

Observons que (vi) entraîne l'existence d'un nombre réel w' tel que $1 < w' < 3/2$ et

$$\begin{aligned} r_j + ws_j \geq r_j + \frac{w-1}{2} \cdot s_j + \frac{w+1}{2} \cdot s_j &\geq \left(1 + \frac{w-1}{2(2c+1)}\right) r_j + \left(1 + \frac{w-1}{2}\right) s_j \\ &\geq 1 + w'(r_j + s_j), \end{aligned}$$

pour j assez grand. Par conséquent, on déduit de (10.3) que

$$\left| \xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)} \right| < \frac{1}{2\, b^{w'(r_j+s_j)}},$$

qui est exactement la condition (iv). □

10.2. Approximation algébrique des nombres de complexité sous-linéaire

Dans cette partie, nous achevons la démonstration du théorème 5.3. Étant donné un nombre réel de complexité sous-linéaire, nous utilisons la suite de rationnels $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ qui lui est associée par la proposition 10.1 afin d'appliquer le théorème ES et d'en déduire la mesure de transcendance recherchée.

Démonstration du théorème 5.3. Soit ξ un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire en base b et vérifiant $0 < \xi < 1$. La proposition 10.1 assure l'existence de deux nombres réels positifs w et c, de deux suites d'entiers positifs ou nuls $(r_j)_{j\geq 1}$, et $(p_j)_{j\geq 1}$, et d'une suite strictement croissante d'entiers positifs $(s_j)_{j\geq 1}$ tels que $1 < w < 3/2$ et, pour tout $j \geq 1$,

(i) $r_j \leq cs_j$;

(ii) si $r_j \geq 1$, alors b ne divise pas p_j ;

(iii) $2(r_j + s_j) \leq r_{j+1} + s_{j+1} \leq c(r_j + s_j)$;

(iv)
$$\left| \xi - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)} \right| < \frac{1}{2b^{w(r_j+s_j)}}.$$

Nous insistons sur le fait que p_j et $b^{r_j}(b^{s_j}-1)$ ne sont pas supposés être premiers entre eux. Nous montrons dans cette partie que les conditions (i) à (iv) suffisent pour borner la qualité de l'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré d avec $d \geq 2$.

En posant $t_j = r_j + s_j$ pour $j \geq 1$, la condition (iii) s'écrit

$$2t_j \leq t_{j+1} \leq ct_j, \quad (j \geq 1), \tag{10.4}$$

et la condition (i) entraîne

$$s_j \geq \frac{t_j}{c+1}, \quad (j \geq 1). \tag{10.5}$$

Comme la suite $(s_j)_{j\geq 1}$ est strictement croissante, nous pouvons supposer en outre que $t_1 \geq 6$.

Soit d un entier, $d \geq 2$, et soit α un nombre algébrique réel de degré d et de hauteur strictement supérieure à $3^{12/(w-1)}$ et à 3^d. Soit j l'entier donné par

$$b^{t_{j-1}} \leq 3^d\, H(\alpha) < b^{t_j}. \tag{10.6}$$

Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Nous allons majorer χ en fonction de d.

Soit M le plus grand nombre entier pour lequel $2b^{wc^{M-1}t_j} < H(\alpha)^\chi$. Par (10.4), pour tout entier $h = 0, \ldots, M-1$, on a $2b^{wt_{j+h}} \leq 2b^{wc^{M-1}t_j}$ et donc

$$\begin{aligned} \left|\alpha - \frac{p_{j+h}}{b^{r_{j+h}}(b^{s_{j+h}}-1)}\right| &\leq \left|\xi - \frac{p_{j+h}}{b^{r_{j+h}}(b^{s_{j+h}}-1)}\right| + |\xi - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2b^{wt_{j+h}}} + H(\alpha)^{-\chi} < \frac{1}{b^{wt_{j+h}}}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

On a alors

$$|b^{t_{j+h}}\alpha - b^{r_{j+h}}\alpha - p_{j+h}| < b^{-(w-1)t_{j+h}}.$$

On considère les formes linéaires

$$L_{1,\infty}(X,Y,Z) = X\alpha - Y\alpha - Z, \qquad L_{2,\infty}(X,Y,Z) = X, \qquad L_{3,\infty}(X,Y,Z) = Y,$$

et, pour tout diviseur premier ℓ de b,

$$L_{1,\ell}(X,Y,Z) = X, \qquad L_{2,\ell}(X,Y,Z) = Y, \qquad L_{3,\ell}(X,Y,Z) = Z.$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des diviseurs premiers de b. Posons $\varepsilon = w-1$ et, pour $0 \leq h \leq M-1$, posons

$$\mathbf{x}_h = (b^{t_{j+h}}, b^{r_{j+h}}, p_{j+h}).$$

On observe alors que

$$\prod_{k=1}^{3} |L_{k,\infty}(\mathbf{x}_h)| \cdot \prod_{k=1}^{3} \prod_{\ell \in \mathcal{S}} |L_{k,\ell}(\mathbf{x}_h)|_\ell < (b^{t_{j+h}})^{-\varepsilon},$$

pour $0 \leq h \leq M-1$. Observons que $H(\mathbf{x}_h) = b^{t_{j+h}}$ découle de l'hypothèse $|\xi| < 1$. Par conséquent, l'inégalité

$$\prod_{k=1}^{3} |L_{k,\infty}(\mathbf{x})| \cdot \prod_{k=1}^{3} \prod_{\ell \in \mathcal{S}} |L_{k,\ell}(\mathbf{x})|_\ell < H(\mathbf{x})^{-\varepsilon} \tag{10.8}$$

possède au moins M solutions $\mathbf{x}$ de hauteur supérieure ou égale à b^{t_j}. Afin d'appliquer le théorème ES, nous devons majorer la hauteur, au sens de [23], des formes linéaires apparaissant dans (10.8). La définition figurant au début de la partie 3 de [23] montre que la hauteur d'une telle forme linéaire se majore facilement en fonction de la hauteur de ses coefficients. Ainsi, il est facile de vérifier que la hauteur des formes linéaires $L_{k,\ell}$, $1 \leq k \leq 3$, $\ell \in \mathcal{S}$, et celle des formes linéaires $L_{k,\infty}$, $1 \leq k \leq 3$, est strictement inférieure à $3^d H(\alpha)$, et donc à b^{t_j}, par (10.6).

Le théorème ES assure alors l'existence d'une constante $c_{\mathcal{S},\varepsilon}$, ne dépendant que du cardinal de $\mathcal{S}$ et de ε, et telle que les triplets $\mathbf{x}_h$, $0 \leq h \leq M-1$, sont contenus dans au plus

$$T < c_{\mathcal{S},\varepsilon} \log(3d) \log\log(3d) \tag{10.9}$$

sous-espaces rationnels propres de $\mathbf{Q}^3$.

Posons

$$L = \lceil 2\log\bigl(16d(c+1)\bigr) \rceil, \tag{10.10}$$

et supposons qu'un sous-espace rationnel propre de $\mathbf{Q}^3$ contienne L points entiers $\mathbf{x}_h$ qui sont solutions de (10.8). Cela signifie qu'il existe un triplet (x, y, z) d'entiers non tous nuls et des entiers $0 \leq i_1 < \ldots < i_L < M$ vérifiant

$$x b^{r_{j+i_k} + s_{j+i_k}} + y b^{r_{j+i_k}} + z p_{j+i_k} = 0, \quad (1 \leq k \leq L). \tag{10.11}$$

La condition (iii) entraîne que les vecteurs $\mathbf{x}_{i_1}$ et $\mathbf{x}_{i_2}$ ne sont pas colinéaires. Le lemme 7.5 assure que l'on peut choisir x, y et z de telle sorte que

$$\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 2b^{2t_{j+i_2}}. \tag{10.12}$$

Considérons un entier k tel que $1 \leq k \leq L$. Réécrivons (10.11) sous la forme

$$x + \frac{y}{b^{s_{j+i_k}}} + z\alpha + z\left(\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}}} - \alpha\right) = 0,$$

et observons que d'après (10.7), (iv) et le fait que $|\xi| < 1$, il vient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}}} - \alpha\right| &\leq \left|\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}+s_{j+i_k}}} - \frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}}(b^{s_{j+i_k}}-1)}\right| + \left|\frac{p_{j+i_k}}{b^{r_{j+i_k}}(b^{s_{j+i_k}}-1)} - \alpha\right| \\
&\leq \frac{2}{b^{s_{j+i_k}}}.
\end{aligned}$$

Pour $k = L$, il découle alors de (10.11) et de (10.12) que

$$|x + z\alpha| \le \frac{3\,\max\{|x|, |y|, |z|\}}{b^{s_{j+i_L}}} \le 6b^{2t_{j+i_2} - s_{j+i_L}}. \tag{10.13}$$

Comme α est irrationnel, le lemme 7.2, (10.6) et (10.12) entraînent que

$$\begin{aligned} |x + z\alpha| &\ge 2^{-2d}\, z^{-d+1}\, H(\alpha)^{-1} \\ &\ge 2^{-2d}\, z^{-d+1}\, b^{-t_j} \ge 2^{-2d}\, (2b^{2t_{j+i_2}})^{-d+1}\, b^{-t_j}. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Il découle de (10.4), (10.5) et (10.10) que

$$2t_{j+i_2} - s_{j+i_L} \le 2t_{j+i_2} - \frac{t_{j+i_L}}{c+1} \le 2t_{j+i_2}\left(1 - \frac{2^{L-2}}{c+1}\right) \le -4dt_{j+i_2}. \tag{10.15}$$

Par conséquent, (10.13), (10.14) et (10.15) mènent à

$$4^{-2d} b^{-3dt_{j+i_2}} \le 2^{-2d}\, (2b^{2t_{j+i_2}})^{-d+1}\, b^{-t_j} \le |x + z\alpha| \le 6b^{2t_{j+i_2} - s_{j+i_L}},$$

ce qui contredit $t_{j+i_2} \ge t_1 \ge 6$.

Ainsi, chacun des T sous-espaces introduits précédemment contient au plus L points de la suite $\{\mathbf{x}_h,\ 0 \le h \le M-1\}$. Dans la suite, les constantes sous-entendues par le symbole $\ll$ sont indépendantes de d. La majoration de T donnée par l'inégalité (10.9) entraîne alors que

$$M \ll (\log 3d)^2 (\log\log 3d).$$

En outre, (10.4), (10.6) et la définition de χ donnent

$$H(\alpha)^\chi \le 2b^{wc^M t_j} \le 2\big(3^d H(\alpha)\big)^{wc^{M+1}} \le 2\big(H(\alpha)\big)^{2wc^{M+1}},$$

d'où

$$\chi \ll c^M \ll (c_1 d)^{c_2 (\log 3d)(\log\log 3d)},$$

où c_1, c_2 ne dépendent pas de d. Ainsi, si ξ n'est pas un nombre de Liouville, le lemme 7.1 implique l'existence d'une constante c_3 indépendante de d telle que

$$w_d(\xi) \le (2d)^{c_3 (\log 3d)(\log\log 3d)},$$

pour tout entier $d \ge 1$, ce qui termine cette démonstration. □

11. Approximation rationelle des nombres de complexité sous-linéaire

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème 5.4, qui illustre comment l'exposant diophantien associé à un nombre réel irrationnel de complexité sous-linéaire permet d'en contrôler l'approximation rationnelle.

Avant d'établir le théorème 5.4, nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

Lemme 11.1. *Soient $b \geq 2$ un entier, U et V deux mots finis sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ de longueur r et s, respectivement. Posons*

$$\frac{p}{q} := 0.a_1 a_2 \ldots = 0.UV^{\infty}.$$

Soit $\xi := 0.b_1 b_2 \ldots$ un nombre réel tel qu'il existe un entier $j \geq r+1$ vérifiant :

(i) $a_n = b_n$, *pour* $1 \leq n < j$;

(ii) $a_j \neq b_j$.

Alors,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{b^{j+s}}.$$

Démonstration. Posons $a_j = l$ et $b_j = m$. Supposons tout d'abord que $l > m$. On a donc $l \geq 1$ et

$$\frac{p}{q} > 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1} l \underbrace{00 \ldots 0 \ldots 0}_{s-1 \text{ fois}} l,$$

tandis que

$$\xi \leq 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1}(m+1) \leq 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1} l.$$

Ceci donne

$$\frac{p}{q} - \xi > \frac{1}{b^{j+s}}.$$

Supposons maintenant que $m > l$. On a alors $l \leq b-2$ et

$$p/q < 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1} l \underbrace{(b-1)(b-1) \ldots (b-1)}_{s-1 \text{ fois}} (l+1)$$

$$\leq 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1} l \underbrace{(b-1)(b-1) \ldots (b-1)}_{s \text{ fois}},$$

tandis que

$$\xi \geq 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1} m \geq 0.a_1 a_2 \ldots a_{j-1}(l+1).$$

Cela entraîne

$$\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{b^{j+s}},$$

et le lemme est démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 5.4.

Démonstration du théorème 5.4. On suppose que les paramètres b, c, $\mathbf{a}$ et ξ introduits dans l'énoncé du théorème sont désormais fixés. Soient δ un nombre strictement positif et

(p, q) une paire d'entiers positifs. Nous allons montrer que, pour q suffisamment grand, on a toujours

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{M+\delta}}, \tag{11.1}$$

où $M = (2c+1)^3(\mathrm{Dio}(\mathbf{a}) + 1)$.

Nous allons tout d'abord introduire une suite de nombres rationnels qui approchent assez bien ξ (voir l'inégalité (11.8)) et dont les dénominateurs ne croissent pas trop rapidement (voir l'inégalité (11.7)).

Rappelons brièvement les conclusions partielles de l'étude combinatoire menée dans la partie 10.1 en réécrivant les assertions (v) à (vii). Il existe deux suites de mots finis $(U_\ell)_{\ell \geq 1}$ et $(V_\ell)_{\ell \geq 1}$, une suite de nombres réels $(w_\ell)_{\ell \geq 1}$ et une suite d'entiers $(p_\ell)_{\ell \geq 1}$ telles que, si l'on pose $r_\ell = |U_\ell|$, $s_\ell = |V_\ell|$ et $q_\ell = b^{r_\ell}(b^{s_\ell} - 1)$, on a

$$b^{\ell/2} - 1 \leq q_\ell \leq b^{(c+1)\ell} - 1, \tag{11.2}$$

et

$$\frac{p_\ell}{q_\ell} := 0.U_\ell {V_\ell}^\infty.$$

En outre, les $|U_\ell V_\ell^{w_\ell}|$ premières lettres de ξ et p_ℓ/q_ℓ coïncident, et donc

$$\left|\xi - \frac{p_\ell}{q_\ell}\right| \leq \frac{1}{b^{|U_\ell V_\ell^{w_\ell}|}}.$$

D'autre part, l'inégalité (10.1) stipule que $|U_\ell V_\ell^{w_\ell}|/|U_\ell V_\ell| \geq 1 + 1/(2c+1)$, d'où

$$\left|\xi - \frac{p_\ell}{q_\ell}\right| \leq \frac{1}{\left(b^{|U_\ell V_\ell|}\right)^{1+1/(2c+1)}} = \frac{1}{\left(b^{r_\ell + s_\ell}\right)^{1+1/(2c+1)}} < \frac{1}{q_\ell^{1+1/(2c+1)}}. \tag{11.3}$$

Le pas suivant consiste à déduire du lemme 11.1 une bonne minoration de la distance de ξ à p_ℓ/q_ℓ. Posons $d = \mathrm{Dio}(\mathbf{a})$ et soit ε un nombre réel positif. Par définition de $\mathrm{Dio}(\mathbf{a})$, si $U_\ell V_\ell^s$ est un préfixe du mot $\mathbf{a}$, alors $|U_\ell V_\ell^s| < |U_\ell V_\ell|(d + \varepsilon/3)$, dès que ℓ est assez grand. Par conséquent, pour un tel ℓ, au maximum les $|U_\ell V_\ell|(d + \varepsilon/2)$ premiers chiffres de ξ et p_ℓ/q_ℓ coïncident. Par (11.3), les hypothèses du lemme 11.1 sont satisfaites pour un entier j vérifiant $(r_\ell + s_\ell)(1 + 1/(2c+1)) < j < (r_\ell + s_\ell)(d + \varepsilon/2)$. Nous obtenons donc

$$\left|\xi - \frac{p_\ell}{q_\ell}\right| \geq \frac{1}{b^{(r_\ell+s_\ell)(d+\varepsilon/2)+s_\ell}} > \frac{1}{\left(b^{r_\ell}(b^{s_\ell} - 1)\right)^{d+1+\varepsilon}} = \frac{1}{q_\ell^{d+1+\varepsilon}}, \tag{11.4}$$

pour ℓ assez grand. À présent, nous fixons un nombre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que

$$(2c+1)\varepsilon + (2c+1)\varepsilon^2 + (2c+1)d\varepsilon + (2c+1)^3\varepsilon < \delta/2. \tag{11.5}$$

Soit $n_1 \geq n_0$ un entier tel que (11.5) est vraie pour tout $\ell \geq n_1$.

Le fait que la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ n'est pas nécessairement croissante poserait problème dans la suite de la démonstration. Nous commençons donc par en extraire une sous-suite convenable. Posons $\ell_1 = n_1$ et $\ell_{n+1} = \lceil (2c+1)\ell_n \rceil$ pour $n \geq 1$. Notons alors $P_n = p_{\ell_n}$ et $Q_n = q_{\ell_n}$. Il découle alors de (11.2) que

$$\begin{aligned} b^{(c+1/2)\ell_n} - 1 < b^{\ell_{n+1}/2} - 1 \leq Q_{n+1} &= q_{\ell_{n+1}} \\ &\leq b^{(c+1/2)\ell_{n+1}} - 1 < b^{(2c^2+2c+1/2)n_\ell + 2c+1}, \end{aligned} \tag{11.6}$$

tandis que

$$b^{\ell_n/2} - 1 \leq Q_n = q_{\ell_n} \leq b^{(c+1/2)\ell_n} - 1. \tag{11.7}$$

En résumé, nous avons établi l'existence d'une suite $(P_n/Q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels et d'un entier $n_2 > n_1$ tels que

$$\frac{1}{Q_n^{d+1+\varepsilon}} < \left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^{1+1/(2c+1)}}, \quad (n \geq n_2), \tag{11.8}$$

et

$$Q_n < Q_{n+1} < Q_n^{(2c+1)^2+\varepsilon}, \quad (n \geq n_2). \tag{11.9}$$

Les inégalités (11.8) et (11.9) se déduisent immédiatement de (11.3), (11.4), (11.6) et (11.7).

Abordons maintenant la dernière étape de la démonstration. Soit p/q un rationnel avec q vérifiant

$$2q \geq Q_{n_2+1}^{1/(2c+1)}, \quad q \geq 2^{1+2M/\delta}, \quad q \geq 2^{1+(2c+1)^3+\delta/2}.$$

Supposons en outre

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(2q)^{1+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)}}. \tag{11.10}$$

Observons tout d'abord que si (11.10) n'est pas vérifiée, alors (11.1) l'est. En effet, dans ce cas (11.5) implique $(2c+1)\varepsilon < \delta/2$ et l'on obtient $2+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon) < M+\delta$, puis, comme $q \geq 2^{1+(2c+1)^3+\delta/2} > 2^{1+(2c+1)^3+(2c+1)\varepsilon}$, on a

$$(2q)^{1+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)} < q^{2+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)} < q^{M+\delta},$$

et (11.1) est satisfaite par le rationnel p/q.

Comme, par hypothèse, $2q \geq Q_{n_3+1}^{1/(2c+1)}$, il découle de (11.9) qu'il existe un unique entier $n_3 > n_2$ tel que

$$Q_{n_3-1} \leq (2q)^{2c+1} < Q_{n_3} < Q_{n_3-1}^{(2c+1)^2+\varepsilon}. \tag{11.11}$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\left| \xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} \right| \geq \left| \left| \xi - \frac{p}{q} \right| - \left| \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} - \frac{p}{q} \right| \right|. \tag{11.12}$$

Si p/q et P_{n_3}/Q_{n_3} sont distincts, on a la minoration triviale

$$\left|\frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qQ_{n_3}}\cdot$$

En outre,

$$Q_{n_3} \leq Q_{n_3-1}^{(2c+1)^2+\varepsilon} \leq (2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)}$$

et l'on déduit de l'inégalité précédente que

$$\left|\frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{2}{(2q)^{1+(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)}} > 2\left|\xi - \frac{p}{q}\right|\cdot$$

Alors, (11.10) et (11.12) entraînent que si $p/q \neq P_{n_3}/Q_{n_3}$,

$$\left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| > \frac{1}{2qQ_{n_3}}\cdot$$

Il découle de (11.11) que $2q < Q_{n_3}^{1/(2c+1)}$, d'où

$$\left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| > \frac{1}{Q_{n_3}^{1+1/(2c+1)}}\ ,$$

en contradiction avec (11.8). Par conséquent, sous l'hypothèse (11.10), on a nécessairement $p/q = P_{n_3}/Q_{n_3}$. Dans ce cas, comme $n_3 > n_2$, on déduit de (11.8) que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \left|\xi - \frac{P_{n_3}}{Q_{n_3}}\right| > \frac{1}{Q_{n_3}^{d+1+\varepsilon}}$$

et, comme $(2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)} \geq Q_{n_3}$, on obtient

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)(d+1+\varepsilon)}}.$$

Il découle alors de (11.5) et de l'hypothèse $q \geq 2^{1+2M/\delta}$ que

$$(2q)^{(2c+1)((2c+1)^2+\varepsilon)(d+1+\varepsilon)} \leq (2q)^{M+\delta/2} \leq q^{M+\delta/2}2^{M+\delta/2} \leq q^{M+\delta}$$

et ceci implique

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^{M+\delta}}\cdot$$

L'inégalité (11.1) est par conséquent satisfaite pour tout

$$q \geq \max\left\{\frac{Q_{n_2+1}^{1/(2c+1)}}{2}, 2^{1+2M/\delta}, 2^{1+(2c+1)^3+\delta/2}\right\},$$

ce qui termine cette démonstration. □

12. L'exposant diophantien des mots sturmiens

Comme nous l'avons déjà mentionné, les suites sturmiennes sont les suites de complexité minimale parmi les suites apériodiques; elles vérifient $p(n) = n + 1$ pour tout entier n. Dans cette partie, nous étudions l'exposant diophantien des mots sturmiens. Plus précisément, nous caractérisons les mots sturmiens dont l'exposant diophantien est fini.

Nous utilisons la caractérisation arithmétique des suites sturmiennes rappelée cidessous.

Pour $(x, \alpha) \in [0, 1[\times([0, 1] \setminus \mathbf{Q})$, on définit la suite $\mathbf{s}_{\alpha,x} = (s_{\alpha,x,n})_{n\geq 0}$ par

$$s_{\alpha,x,n} = a \text{ si } \{x + n\alpha\} \in [0, 1 - \alpha[\text{ et } s_{\alpha,x,n} = b \text{ si } \{x + n\alpha\} \in [1 - \alpha, 1[,$$

et la suite $\mathbf{s'}_{\alpha,x} = (s'_{\alpha,x,n})_{n\geq 0}$ par

$$s'_{\alpha,x,n} = a \text{ si } \{x + n\alpha\} \in]0, 1 - \alpha] \text{ et } s'_{\alpha,x,n} = b \text{ si } \{x + n\alpha\} \in]1 - \alpha, 1[\cup\{0\}.$$

Les deux suites $\mathbf{s}_{\alpha,x}$ et $\mathbf{s'}_{\alpha,x}$ sont des suites sturmiennes. Réciproquement, pour toute suite sturmienne $\mathbf{u}$, il existe un unique couple $(x, \alpha) \in [0, 1[\times([0, 1] \setminus \mathbf{Q})$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{s}_{\alpha,x}$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{s'}_{\alpha,x}$. Le nombre irrationnel α est l'angle de la suite sturmienne $\mathbf{u}$. Il correspond à la fréquence d'apparition de la lettre b dans la suite $\mathbf{u}$.

Le résultat suivant montre que la finitude de l'exposant diophantien d'une suite sturmienne dépend des propriétés diophantiennes de son angle.

Proposition 12.1. *Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite sturmienne d'angle α. Alors,* $\mathrm{Dio}(\mathbf{u})$ *est fini si, et seulement si, le nombre réel α est à quotients partiels bornés.*

Démonstration. Considérons une suite sturmienne $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq 0}$. Il existe un couple $(x, \alpha) \in [0, 1[\times([0, 1] \setminus \mathbf{Q})$ tel que soit $\mathbf{u} = \mathbf{s}_{\alpha,x}$, soit $\mathbf{u} = \mathbf{s'}_{\alpha,x}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbf{u} = \mathbf{s}_{\alpha,x}$ puisque les deux suites $\mathbf{s}_{\alpha,x}$ et $\mathbf{s'}_{\alpha,x}$ ont le même exposant diophantien. En effet, l'irrationalité de α implique que ces deux suites diffèrent d'au plus un terme.

Supposons dans un premier temps que α est un nombre réel à quotients partiels bornés. Nous rappelons que l'indice d'un mot infini $\mathbf{a}$, généralement noté $\mathrm{Ind}(\mathbf{a})$, est le supremum des nombres réels s pour lesquels il existe un mot fini non vide V tel que V^s ait une occurrence dans le mot $\mathbf{a}$. Cette définition implique que pour tout mot infini $\mathbf{a}$, on a $\mathrm{Dio}(\mathbf{a}) \leq \mathrm{Ind}(\mathbf{a})$. D'autre part, un résultat de Mignosi [40] stipule qu'une suite sturmienne dont l'angle est un nombre réel à quotients partiels bornés a toujours un indice fini. Il suit donc que $\mathrm{Dio}(\mathbf{u})$ est nécessairement fini si l'angle de $\mathbf{u}$ est un nombre réel à quotients partiels bornés.

Nous supposons à présent que α est un nombre réel dont la suite des quotients partiels $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée et nous allons prouver que $\mathrm{Dio}(\mathbf{u}) = +\infty$. D'après la définition de l'exposant diophantien, il suffit de montrer que pour tout entier p, il existe deux mots finis U, V, et un nombre réel $s > 0$ tels que :

(a) UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$;

(b) $\frac{|UV^s|}{|UV|} \geq p$.

Considérons à présent un entier p strictement positif. Nous allons démontrer qu'il existe toujours un tel triplet (U, V, s).

Puisque la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée, il existe un entier $k > 0$ tel que $a_{k+1} > 4p^2$. Notons p_k/q_k le k-ième convergent du nombre α. Nous supposons que k est choisi assez grand pour garantir que

$$\frac{1}{4q_k} < \min\{\alpha, 1-\alpha\} \quad \text{et} \quad q_k > p. \tag{12.1}$$

Nous supposons également que k est pair, le cas où k est impair se traitant de façon similaire. Nous rappelons que sous cette hypothèse, on a

$$0 < q_k\alpha - p_k = \{q_k\alpha\} = \|q_k\alpha\| < \frac{1}{q_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1}q_k} < \frac{1}{4p^2q_k}\cdot \tag{12.2}$$

Alors, pour des entiers j et r tels que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq r \leq p^2$, on obtient

$$\|(x + j\alpha) - (x + (j + rq_k)\alpha)\| = \|rq_k\alpha\| \leq r\|q_k\alpha\| \leq \frac{r}{q_{k+1}}$$

et donc

$$\|(x + j\alpha) - (x + (j + rq_k)\alpha)\| < \frac{1}{4q_k}\cdot \tag{12.3}$$

Nous devons alors distinguer plusieurs cas et, pour cela, nous allons introduire les notations suivantes. Étant donné un entier j tel que $0 \leq j < q_k$, nous disons que

(i) j est de type A si $u_j = a$ et s'il existe un entier r, $1 \leq r \leq p^2$, tel que $u_{j+rq_k} = b$;

(ii) j est de type B si $u_j = b$ et s'il existe un entier r, $1 \leq r \leq p^2$, tel que $u_{j+rq_k} = a$;

(iii) j est de type C s'il n'est ni de type A, ni de type B, c'est-à-dire, si $u_j = u_{j+rq_k}$ pour tout entier r, $1 \leq r \leq p^2$.

Tout entier j, $0 \leq j < q_k$, est exactement d'un seul type A, B ou C. Tout d'abord, notons que j est de type A signifie que $\{x + j\alpha\}$ est très proche de $1-\alpha$. Plus précisément, (12.3) donne

$$1 - \alpha - \frac{1}{4q_k} < \{x + j\alpha\} < 1 - \alpha. \tag{12.4}$$

De même, si j est de type B, alors $\{x + j\alpha\}$ est très proche de 1 et (12.3) donne

$$1 - \frac{1}{4q_k} < \{x + j\alpha\} < 1. \tag{12.5}$$

Il est important pour la suite de remarquer qu'il existe au plus un entier de chacun des types A et B. En effet, dans le cas contraire, les inégalités (12.4) et (12.5) impliqueraient l'exitence de deux entiers i et j, $0 \leq i < j < q_k$, tels que

$$0 < \{(j - i)\alpha\} < \frac{1}{2q_k}\cdot$$

Cette dernière inégalité fournirait une contradiction puisque $1 \leq j - i < q_k$. En effet, nous rappelons que si q est un entier strictement positif tel que

$$\|q\alpha\| < \frac{1}{2q_k},$$

alors $q \geq q_k$. Pour les mêmes raisons, notons que si un entier j est de type A ou B, l'entier r qui lui est associé dans (i) ou (ii) est unique.

Nous devons à présent distinguer quatre cas.

(i) Premièrement, supposons que tout entier j, $0 \leq j < q_k$, est de type C. Dans ce cas, nous avons

$$u_j = u_{j+lq_k}, \tag{12.6}$$

pour tout couple (j, l) tel que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p - 1$. Soit V le préfixe de longueur q_k de $\mathbf{u}$. Alors, l'égalité (12.6) implique que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$, où U désigne le mot vide et $s = p$. De plus, d'après (12.1), on a

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = p.$$

(ii) Supposons à présent qu'il existe un entier j_0 de type A avec $0 \leq j_0 < q_k - 1$. Alors, les inégalités (12.1), (12.2) et (12.3) impliquent l'existence d'un entier r_0, $1 \leq r_0 \leq p^2$, tel que

$$\begin{aligned} 0 < 1 - \alpha - \frac{1}{4q_k} < \{x + j_0\alpha\} < \{x + (j_0 + q_k)\alpha\} \\ < \ldots < \{x + (j_0 + (r_0 - 1)q_k)\alpha\} < 1 - \alpha \end{aligned} \tag{12.7.A}$$

et

$$1 - \alpha \leq \{x + (j_0 + r_0 q_k)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_0 + p^2 q_k)\alpha\} < 1 - \alpha + \frac{1}{4q_k} < 1. \tag{12.7.B}$$

On obtient immédiatement que

$$1 - \alpha < 1 - \frac{1}{4q_k} < \{x + (j_0 + 1)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_0 + 1 + (r_0 - 1)q_k)\alpha\} < 1 \tag{12.8.A}$$

tandis que

$$0 \leq \{x + (j_0 + 1 + r_0 q_k)\alpha\} < \ldots < \{x + (j_0 + 1 + p^2 q_k)\alpha\} < \frac{1}{4q_k} < 1 - \alpha. \tag{12.8.B}$$

Ainsi, $j_0 + 1$ est de type B et l'entier qui lui est associé (cf. (i)) est également r_0. Puisqu'il y a au plus un entier de chacun des types A et B, tout entier j, $0 \leq j < q_k$, $j \notin \{j_0, j_0 + 1\}$, est de type C.

(ii.a) Si $r_0 \geq p$, d'après (12.7.A), (12.8.A) et le fait que tout $0 \leq j < q_k$, $j \notin \{j_0, j_0+1\}$, est de type C, il vient

$$u_j = u_{j+lq_k}, \tag{12.9}$$

pour tout couple (j,l) tel que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p-1$. Alors, l'égalité (12.9) implique que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$, où U est le mot vide, V est le préfixe de longueur q_k de $\mathbf{u}$ et $s = p$. On conclut comme dans le cas (i).

(ii.b) Si $1 \leq r_0 < p$, d'après (12.7.B), (12.8.B) et le fait que tout $0 \leq j < q_k$, $j \notin \{j_0, j_0+1\}$, est de type C, il vient

$$u_{j+r_0q_k} = u_{j+r_0q_k+lq_k}, \tag{12.10}$$

pour tout couple (j,l) tel que $0 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p^2 - r_0$. Notons $U := u_0u_1\ldots u_{r_0q_k-1}$ le préfixe de $\mathbf{u}$ de longueur r_0q_k et posons $V := u_{r_0q_k}u_{r_0q_k+1}\ldots u_{r_0q_k+q_k-1}$ et $s = p^2 - r_0 + 1$. Alors, l'égalité (12.10) implique que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$. Puisque $|U| = r_0q_k$ et $|V| = q_k$, on obtient :

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = \frac{(p^2+1)q_k}{(r_0+1)q_k} \geq \frac{p^2+1}{p} > p.$$

(iii) Supposons que $q_k - 1$ soit de type A. Alors, d'après les inégalités (12.1), (12.2) et (12.3), il existe un entier r_0', $1 \leq r_0' \leq p^2$, tel que

$$0 < \{x + (q_k-1)\alpha\} < \{x + (2q_k-1)\alpha\} < \ldots < \{x + (r_0'q_k-1)\alpha\} < 1-\alpha \tag{12.11.A}$$

et

$$1-\alpha \leq \{x+((r_0'+1)q_k-1)\alpha\} < \ldots < \{x+((p^2+1)q_k-1)\alpha\} < 1-\alpha+\frac{1}{4q_k} < 1. \tag{12.11.B}$$

On obtient immédiatement que

$$1-\alpha < \{x+q_k\alpha\} < \ldots < \{x+r_0'q_k\alpha\} < 1 \tag{12.12.A}$$

tandis que

$$0 \leq \{x+(r_0'+1)q_k\alpha\} < \ldots < \{x+(p^2+1)q_k\alpha\} < \frac{1}{4q_k} < 1-\alpha. \tag{12.12.B}$$

Donc, 0 est de type B et l'entier qui lui est associé (cf. (ii)) est $r_0'+1$. Ainsi, tout entier j, $0 < j < q_k - 1$, est de type C.

(iii.a) Si $r_0' \geq p$, on conclut comme dans le cas (ii.a) grâce aux inégalités (12.11.A) et (12.12.A), et au fait que tout entier j, $0 < j < q_k - 1$, est de type C.

(iii.b) Si $1 \leq r_0' < p$, les inégalités (12.11.B) et (12.12.B) et le fait que tout entier j, $0 < j < q_k - 1$, est de type C, impliquent que

$$u_{j+r_0'q_k} = u_{j+r_0'q_k+lq_k}, \tag{12.13A}$$

pour tout couple (j,l) tel que $1 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p^2 - r'_0$, et

$$u_{(r'_0+1)q_k} = u_{(r'_0+1)q_k+lq_k}, \tag{12.13B}$$

pour $1 \leq l \leq p^2 - r'_0 - 1$. Soient $U = u_0 u_1 \dots u_{r'_0 q_k}$ le préfixe de $\mathbf{u}$ de longueur $r'_0 q_k + 1$, V le mot $u_{r'_0 q_k+1} u_{r'_0 q_k+2} \dots u_{(r'_0+1)q_k}$, et $s = p^2 - r'_0 + 1 - 1/q_k$. Alors, les égalités (12.13A) et (12.13B) impliquent que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$. Puisque $|U| = r'_0 q_k + 1$ et $|V| = q_k$, il vient

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = \frac{(p^2+1)q_k}{(r'_0+1)q_k + 1} \geq \frac{p^2+1}{p+1/q_k} > p\left(\frac{p+1/p^2}{p+1/(pq_k)}\right) > p.$$

En effet, $q_k > p$ d'après (12.1).

(iv) Puisqu'il existe au plus un entier de chacun des types A et B, il ne reste plus qu'à considérer le cas où aucun entier n'est de type A et où il existe exactement un entier de type B. Alors, les inégalités (12.2) et (12.3) assurent l'existence d'un entier j_1, $0 \leq j_1 < q_k$, et d'un entier r_1, $1 \leq r_1 \leq p^2$, tels que

$$1 - \alpha < \{x + j_1\alpha\} < \dots < \{x + (j_1 + (r_1 - 1)q_k)\alpha\} < 1 \tag{12.14.A}$$

tandis que

$$0 \leq \{x + (j_1 + r_1 q_k)\alpha\} < \dots < \{x + (j_1 + p^2 q_k)\alpha\} < \frac{1}{4q_k} < 1 - \alpha. \tag{12.14.B}$$

Si $j_1 > 0$, alors les inégalités (12.14A) et (12.14.B) impliquent que $j_1 - 1$ est de type A, ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi, $j_1 = 0$. De plus, si $r_1 \geq 2$, les inégalités (12.14A) et (12.14.B) impliquent que $q_k - 1$ est de type A, ce qui est également impossible. Il suit donc que $r_1 = 1$ et $j_1 = 0$, ce qui assure que

$$u_j = u_{j+lq_k}, \tag{12.15A}$$

pour tout couple (j,l) tel que $1 \leq j < q_k$ et $1 \leq l \leq p^2$, et

$$u_{q_k} = u_{q_k+lq_k}, \tag{12.15B}$$

pour $1 \leq l \leq p^2 - 1$. Soit $U = u_0$ le préfixe de $\mathbf{u}$ de longueur 1, notons V le mot $u_1 u_2 \dots u_{q_k}$, et posons $s = p^2 + 1 - 1/q_k$. Alors, les égalités (12.15A) et (12.15B) impliquent que UV^s est un préfixe de $\mathbf{u}$. Puisque $|U| = 1$ et $|V| = q_k$, il vient d'après (12.1) et (12.1)

$$\frac{|UV^s|}{|UV|} = \frac{(p^2+1)q_k}{q_k+1} = p\left(\frac{p+1/p}{1+1/q_k}\right) > p.$$

Dans tous les cas, nous avons obtenu l'existence d'un triplet (U,V,s) vérifiant les conditions (a) et (b), ce qui termine cette démonstration. $\square$

13. Remarques finales

La méthode introduite dans cet article permet également d'établir des mesures de transcendance pour les nombres p-adiques dont le développement de Hensel a une complexité sous-linéaire (voir [2], Section 6). De même, certains de nos énoncés peuvent être généralisés pour inclure l'approximation par des éléments d'un corps de nombres fixé. Ce type de résultat plus général s'applique à l'étude des développements des nombres réels dans une base β algébrique non entière [3].

Notre méthode s'applique également à certaines classes de fractions continues quasi-périodiques ou quasi-symétriques dont la transcendance est obtenue à l'aide du théorème du sous-espace. Ainsi, dans un travail ultérieur [4], nous donnerons des mesures de transcendance pour les fractions continues de Thue–Morse, les fractions continues sturmiennes et les fractions continues de Maillet–Baker. Le théorème 4.7 constitue un cas particulier de ces résultats.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la partie 5, la méthode de Mahler introduite dans [34] est une alternative à la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt pour prouver la transcendance de certains nombres réels. Étant donnés une suite bornée d'entiers $(a_n)_{n\geq 0}$ et un entier $b \geq 2$, elle peut être utilisée pour démontrer la transcendance du nombre réel $\sum_{n\geq 0} a_n/b^n$ lorsque la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ satisfait à une équation fonctionnelle d'un certain type. Lorsque l'on démontre la transcendance d'un nombre réel à l'aide de cette méthode, il est parfois possible de placer ce nombre dans la classification de Mahler en démontrant qu'il s'agit d'un S-nombre (voir par exemple [46]). C'est en particulier le cas pour le nombre

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2^n}},$$

dont la transcendance découle également aisément du théorème de Ridout ; cependant, la mesure de transcendance qui résulte alors du théorème 3.1 permet seulement de dire qu'il s'agit ou bien d'un S-nombre, ou bien d'un T-nombre. De façon plus générale, les mesures de transcendance que nous obtenons dans cet article, bien que suffisamment précises pour impliquer que les nombres ξ considérés ne sont pas des U-nombres, ne nous permettent malheureusement pas de distinguer les S-nombres des T-nombres. Même une amélioration spectaculaire des énoncés quantitatifs présentés dans la partie 6 ne nous permettrait pas, en suivant l'approche du présent travail, de montrer que la quantité $w_d(\xi)/d$ reste bornée lorsque d tend vers l'infini. Ainsi, des idées nouvelles sont certainement nécessaires pour résoudre la conjecture 5.7. Néanmoins, la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt peut être considérée comme plus générale que celle de Mahler puisqu'aucune équation fonctionnelle n'est requise, ce qui la rend bien plus souple. Notons enfin que la difficulté de distinguer les S-nombres des T-nombres n'est pas nouvelle et ne concerne pas uniquement la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Ainsi, bien que l'on conjecture généralement que le nombre π est un S-nombre, on sait seulement démontrer à ce jour qu'il s'agit soit d'un S-nombre, soit d'un T-nombre [38].

Références bibliographiques

[1] B. Adamczewski and J.-P. Allouche, *Reversals and palindromes in continued fractions*, Theoret. Comput. Sci. 320 (2007), 220–237.

[2] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. 165 (2007), 547–565.

[3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Dynamics for β-shifts and Diophantine approximation*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 27 (2007), 1695–1711.

[4] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Trancendence measures for continued fractions involving repetitive or symmetric patterns*, submitted.

[5] B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca, *Sur la complexité des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 11–14.

[6] B. Adamczewski and J. Cassaigne, *Diophantine properties of real numbers generated by finite automata*, Compos. Math. 142 (2006), 1351–1372.

[7] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, and L. Q. Zamboni, *Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions*, J. Number Theory 91 (2001), 39–66.

[8] J.-P. Allouche and J. O. Shallit, Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations, Cambridge University Press, 2003.

[9] D. H. Bailey and R. E. Crandall, *Random Generators and Normal Numbers*, Experimental Math. 11 (2002), 527–546.

[10] A. Baker, *On Mahler's classification of transcendental numbers*, Acta Math. 111 (1964), 97–120.

[11] V. Berthé, C. Holton and L. Q. Zamboni, *Initial powers of Sturmian words*, Acta Arith. 122 (2006), 315–347.

[12] É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Math. Palermo 27 (1909), 247–271.

[13] Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge, 2004.

[14] Y. Bugeaud and M. Laurent, *Exponents of Diophantine Approximation and Sturmian Continued Fractions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), 773–804.

[15] P. Bundschuh, *Über eine Klasse reeller transzendenter Zahlen mit explizit angebbarer g-adischer und Kettenbruch-Entwicklung*, J. reine angew. Math. 318 (1980), 110–119.

[16] C. S. Calude, Information and Randomness. An algorithmic perspective, Texts in Theoretical Computer Science, an EATCS series, Springer-Verlag, 2002.

[17] D. G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, J. London Math. Soc. 8 (1933), 254–260.

[18] A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory 6 (1972), 164–192.

[19] H. Davenport and P. Erdős, *Note on normal decimals*, Canadian J. Math. 4 (1952), 58–63.

[20] H. Davenport and K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 160–167.

[21] H. Davenport and W. M. Schmidt, *Approximation to real numbers by algebraic integers*, Acta Arith. 15 (1968-1969) 393–416.

[22] J.-H. Evertse, *The number of algebraic numbers of given degree approximating a given algebraic number*. In: Analytic number theory (Kyoto, 1996), 53–83, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[23] J.-H. Evertse and H.P. Schlickewei, *A quantitative version of the Absolute Subspace Theorem*, J. reine angew. Math. 548 (2002), 21–127.

[24] S. Ferenczi and C. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion*, J. Number Theory 67 (1997), 146–161.

[25] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki 2002-2003, exposé no. 910, Astérisque 294 (2004), 27–62.

[26] I. Gheorghiciuc, *The subword complexity of a class of infinite binary words*, Adv. in Appl. Math. 39 (2007), 237–259.

[27] J. F. Koksma, *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Monats. Math. Phys. 48 (1939), 176–189.

[28] M. Laurent, *Exponents of Diophantine Approximation in dimension two*, Canad. J. Math. À paraître.

[29] H. Locher, *On the number of good approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree*, Acta Arith. 89 (1999), 97–122.

[30] M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[31] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain functions in several variables. III.*, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977), 15–47.

[32] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations*, J. reine angew. Math. 330 (1982), 159–172.

[33] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Arithmetic properties of automata: regular sequences*, J. reine angew. Math. 392 (1988), 57–69.

[34] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. 101 (1929), 342–366.

[35] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II*, J. reine angew. Math. 166 (1932), 118–150.

[36] K. Mahler, *Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen*, Mathematica 4B (Zutphen) (1937), 15 pp.

[37] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen*, Proc. Akad. v. Wetensch. 40 (1937), 421–428.

[38] K. Mahler, *On the approximation of* π, Indag. Math. 15 (1953), 30–42.

[39] K. Mahler, *On a Class of Transcendental Decimal Fractions*, Comm. Math. Pure Appl. Math. 29 (1976), 717–725.

[40] F. Mignosi, *Infinite words with linear subword complexity*, Theoret. Comput. Science 65 (1989), 221–242.

[41] M. Mignotte, *Une généralisation d'un théorème de Cugiani–Mahler*, Acta Arith. 22 (1972), 57–67.

[42] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. 60 (1938), 815–866.

[43] M. Morse and G. A. Hedlund, *Symbolic dynamics II*, Amer. J. Math. 62 (1940), 1–42.

[44] J. Mueller and W. M. Schmidt, *On the number of good rational approximations to algebraic numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 859–866.

[45] Ku. Nishioka, *Algebraic independence measures of the values of Mahler's functions*, J. reine angew. Math. 420 (1991), 203–214.

[46] Ku. Nishioka, Mahler functions and transcendence, Lecture Notes in Math. 1631, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[47] D. Ridout, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 4 (1957), 125–131.

[48] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1–20; corrigendum, 168.

[49] D. Roy, *Approximation to real numbers by cubic algebraic integers, II*, Ann. of Math. 158 (2003), 1081–1087.

[50] D. Roy, *Approximation to real numbers by cubic algebraic integers, I*, Proc. London Math. Soc. 88 (2004), 42–62.

[51] W. M. Schmidt, *Simultaneous approximations to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. 125 (1970), 189–201.

[52] W. M. Schmidt, *T-numbers do exist*, Symposia Math. IV, Inst. Naz. di Alta Math., Rome 1968, pp. 3–26, Academic Press, 1970.

[53] W. M. Schmidt, *Mahler's T-numbers*, 1969 Number Theory Institute, (Proc. of Symposia in Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N. Y., 1969), pp. 275–286, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[54] W. M. Schmidt, *Norm form equations*, Ann. of Math. 96 (1972), 526–551.

[55] W. M. Schmidt, Diophantine approximation, Lecture Notes in Mathematics 785, Springer, 1980.

[56] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67–77.

Boris Adamczewski
CNRS, Université de Lyon, Université Lyon 1
Institut Camille Jordan
Bât. Braconnier, 21 avenue Claude Bernard
69622 VILLEURBANNE Cedex (FRANCE)

Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex (FRANCE)

bugeaud@math.u-strasbg.fr